FLORENTIN SMARANDACHE

PROBLEME COMPILATE ŞI REZOLVATE

de

geometrie şi trigonometrie

Chişinău 1998

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
Catedra de geometrie

FLORENTIN SMARANDACHE

PROBLEME COMPILATE ŞI REZOLVATE
de
geometrie şi trigonometrie

Chişinău 1998

FLORENTIN SMARANDACHE
University of New Mexico
Department of Mathemetics
Gallup, NM87301, USA

PROBLEME COMPILATE ŞI REZOLVATE
de geometrie şi trigonometrie, Chişinău:
U.S.M., 1998. - 168 pag.

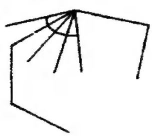
CUPRINSUL

Geometrie, cls. a IX-a

Probleme

1) Măsura unui unghi al unui poligon regulat este de 4 ori mare decît măsura unui unghi exterior. Cîte laturi are poligonul?

Soluţie:



$$\frac{180(n-2)}{n} = 4\frac{180}{5} \Rightarrow n = 10$$

2) Cîte laturi are un poligon convex dacă toate unghiurile sale exterioare sunt optuze?

Soluţie:

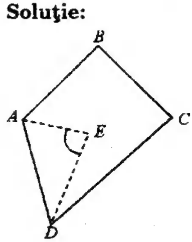
$$\begin{array}{ll} \text{Fie } n = 3 & \left.\begin{array}{l} x_1 > 90 \\ x_2 > 90 \\ x_3 > 90 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 > 270 \text{ deci } n = 3 \text{ este posibil} \\ \qquad\Rightarrow & \\ x_1; x_2; x_3 \sphericalangle \text{ ext} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Fie } n = 4 & \left.\begin{array}{l} x_1 > 90 \\ \vdots \\ x_4 > 90 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 360 \text{ imposibil} \\ \qquad\Rightarrow & \\ x_1; x_2; x_3; x_4 \sphericalangle \text{ ext} & \end{array}$$

Deci $n = 3$.

3) Să se arate că într-un patrulater convex, bisectoarea a 2 $\sphericalangle$ consecutive formează un unghi a cărui măsură este egală cu semisuma măsurilor celorlalte 2 unghiuri.

Soluţie:



$$m(\widehat{AEB}) = \frac{m(\widehat{D}) + m(\widehat{C})}{2}$$

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$$

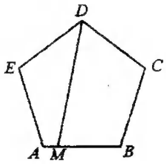
$$\frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2} = 180^\circ - \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$

$$m(\widehat{AEB}) = 180^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{B})}{2} =$$

$$= 180^\circ - 180^\circ + \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2} = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$

4) Arătaţi că o suprafaţă pentagonală convexă poate fi descompusă în două suprafeţe patrulatere.

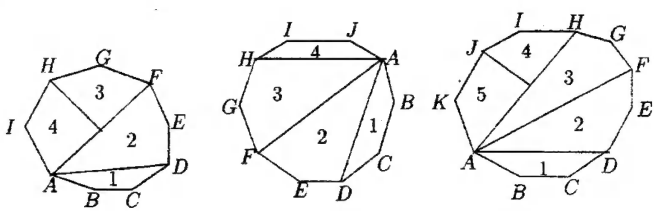
Soluţie:



Fie $\widehat{EDC} \Rightarrow A, B \in \text{int. } \widehat{EDC}$. Fie $M \in |AB| \Rightarrow M \in$ $\in \text{int. } \widehat{EDC} \Rightarrow |DM \subset \text{int. } \widehat{EDC}$ $|EA| \cap |DM = \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow DEAM$ patrulater. La fel $DCBM$

5) Care este numărul minim de suprafeţe patrulatere în care se descompune o suprafaţă poligonală convexă cu 9, 10, 11 vîrfuri?

Soluţie:



9 vîrfuri - 4 patrulatere   10 vîrfuri - 4 patrulatere   11 vîrfuri - 5 patrulatere

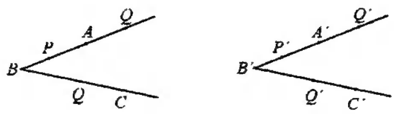
6) Dacă $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ atunci $\exists$ o funcţie bijectivă $f = \widehat{ABC} \to \widehat{A'B'C'}$ a.î. pentru $\forall$ 2 puncte P, $Q \in \widehat{ABC}$, $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$ şi reciproc.

Soluţie:

Presupunem că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Construim o funcţie $f : \widehat{ABC} \to \widehat{A'B'C'}$ a.î

$$\begin{cases} f(B) = B' \\ \text{dacă } P \in |BA,\ f(P) \in B'A' \end{cases}$$

$P \in |BC,\ f(P) \in B'C'$ a.î. $\|BP\| = \|B'P'\|$ unde $P' = f(F)$



Funcţia astfel construită este o bijecţie, întrucît la argumente $\neq$ corespund valori $\neq$ şi $\forall$ punct de pe $A'B'C'$ este imaginea unui singur punct din $\widehat{ABC}$ (din axioma de construirea a segmentelor).

Dacă P, $Q \in$ acestei semidrepte

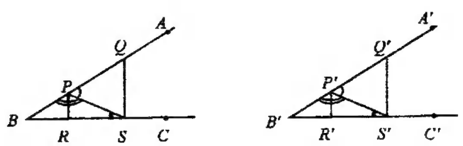
$$\left.\begin{array}{l}\|BP\| = \|B'P'\| \\ \|BQ\| = \|B'Q'\|\end{array}\right\} \Rightarrow \|PQ\| = \|BQ\| - \|BP\| = \|B'Q'\| - \|B'P'\| = \|P'Q'\| = \|f(P), f(Q)\|$$

Dacă P, $Q \in$ la semidrepte $\neq$

$$\left.\begin{array}{l}\|BP\| = \|B'P'\| \\ \|BQ\| = \|B'Q'\| \\ \widehat{PBQ} \equiv \widehat{P'B'Q'}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PBQ = \Delta P'B'Q' \Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\| = \|f(P),\ f(Q)\|$$

Reciproc:

Fie $f : \widehat{ABC} \to \widehat{A'B'C'}$ a.î. f bijectivă şi $\|PQ\| = \|f(P),\ f(Q)\|$.



Fie P, $Q \in |BA$ şi $RS \in |BC$

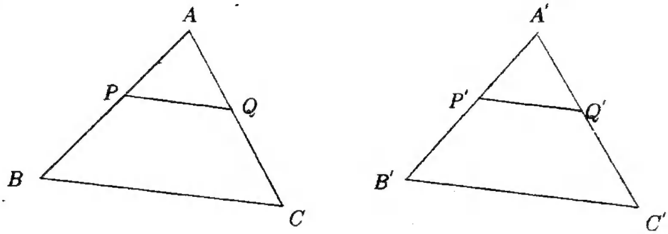
$$\left.\begin{array}{l}\|PQ\| = \|P'Q'\| \\ \|PS\| = \|P'S'\| \\ \|QS\| = \|Q'S'\|\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PQS \equiv \Delta P'Q'S' \Rightarrow \widehat{QPS} \equiv \widehat{Q'P'S'} \Rightarrow \widehat{BPS} \equiv \widehat{B'P'S'} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\|PS\| = \|P'S'\| \\ \|RP\| = \|R'P'\| \\ \|PS\| = \|P'S'\|\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PRS \equiv \Delta P'R'S' \Rightarrow \widehat{PSB} \equiv \widehat{P'S'B'} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \widehat{PBS} \equiv \widehat{P'B'S'}$ (ca dif. la $180°$) adică $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$.

7) Dacă $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ atunci $(\exists)$ o funcţie bijectivă $f:\ ABC \to A'B'C'$ a.î. pt. $(\forall)$ 2puncte P, $Q \in ABC$, $\|PQ\| = \|f(P),\ f(Q)\|$ şi reciproc.

Soluţie:



Fie $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Construim o funcţie $f:\ ABC \to A'B'C'$ a.î. $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ şi deci $P \in |AB| \to P' = f(P) \in |A'B'|$ a.î. $\|AP\| = \|A'P'\|$

$P \in |BC| \to P' = f(P) \in |B'C'|$ a.î. $\|BP\| = \|B'P'\|$

$P \in |CA| \to P' = f(P) \in |C'A'|$ a.î. $\|CP\| = \|C'P'\|$

Funcţia astfel construită este bijectivă.

Fie $P \in |AB|$ şi $a \in |CA| \Rightarrow P' \in |A'B'|$ şi $Q' \in |C'A'|$

$$\left.\begin{array}{l}\|AP\| = \|A'P'\| \\ \|CQ\| = \|C'Q'\| \\ \|CA\| = \|C'A'\|\end{array}\right\} \Rightarrow \|AQ\| = \|A'Q'\|;\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \Rightarrow \triangle APQ \equiv \triangle A'P'Q' \Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\|$$

Raţionament analog pentru $(\forall)$ punctct P şi Q

Reciproc: se presupune că $\exists$ o funcţie bijectivă $f:ABC \to A'B'C'$ cu propriet. din enunţ.

Se notează $f(A) = A''$, $f(B) = B''$, $f(C) = C''$ şi rezultă $\Rightarrow$ că $\|AB\| = \|A''B''\|$, $\|BC\| = \|B''C''\|$, $\|AC\| = \|A''C''\| \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''$

Deoarece$f(ABC) = f([AB] \cup [BC] \cup [CA]) = f([AB]) \cup f([BC]) \cup f([CA]) =$
$= [A''B''] \cup [B''C''] \cup [C''A''] = A''B''C''$

Dar prin ip. $f(ABC) = f(A'B'C')$ deci $\triangle A''B''C'' = \triangle A'B'C'$

$$\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

8) Să se arate că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ atunci $[ABC] \sim [A'B'C']$.

Soluţie:

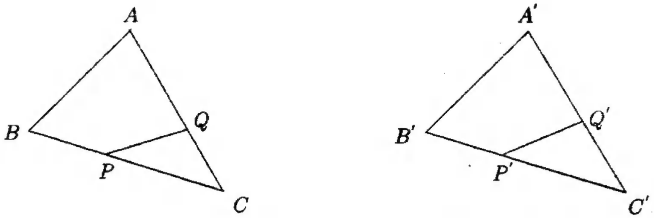
Dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$atunci$(\exists) f : ABC \to A'B'C'$şi $k >.0$ a.î. $\|PQ\| = k\|f(P), f(Q)\|$, $P, Q \in ABC$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\| AB \|}{\| A'B' \|} = \dfrac{\| BC \|}{\| B'C' \|} = \dfrac{\| CA \|}{\|C'A'\|} = k \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'}; \widehat{B} \equiv \widehat{B'}; \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \|AB\| = k\|A'B'\| \\ \|BC\| = k\|B'C'\| \\ \|CA\| = k\|C'A'\| \end{array}$$

Construim o funcţie $f : ABC \to A'B'C'$ a.î. $f(A) = A'; f(B) = B'; f(C) = C'$

dacă $P \in |BC| \to P \in |B'C'|$ a.î. $\|BP\| = k\|B'P'\|$

dacă $P \in |CA| \to P \in |C'A'|$ a.î. $\|CP\| = k\|C'P'\|$; $k-$ constantă de asemănare



Fie $P, Q \in AB$ a.î. $P \in |BC|, Q \in |AC| \Rightarrow P' \in |B'C'|$ şi $\|BP\| = k\|B'P'\|$

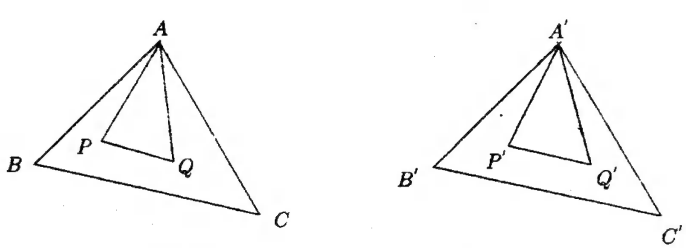
$Q' \in |A'C'|$ şi $\|CQ\| = k\|C'Q'\|$ (1)

Cum $\|BC\| = k\|B'C'\| \Rightarrow \|PC\| = \|BC\| - \|BP\| = k\|B'C'\| - k\|B'P'\| =$
$= k(\|B'C'\| - \|B'P'\|) = k\|P'C'\|$ (2) $\qquad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ (3)

Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow \triangle PCQ \sim \triangle P'C'Q' \Rightarrow \|PQ\| = k\|P'Q'\|$

Raţionament asemămător pentru $P, Q \in ABC$

Extindem funcţia bijectivă construită anterior şi la interioarele celor 2 triunghi: în felul următor:



Fie $P \in$ int. ABC şi construim $P' \in$ int. $A'B'C'$ a.î. $\|AP\| = k\|A'P'\|$.

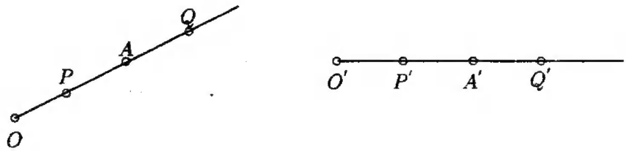
Fie $Q \in$ int. $ABC \to Q' \in$ int. $A'B'C'$ a.î. $\widehat{BAQ} \equiv \widehat{B'A'Q'}$ şi $\|AQ\| = k\|A'Q'\|$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \dfrac{\|AP\|}{\|A'P'\|} = \dfrac{\|AQ\|}{\|A'Q'\|} = k$, $\widehat{PAQ} \equiv \widehat{P'A'Q'} \Rightarrow \triangle APQ \sim \triangle A'P'Q' \Rightarrow$

$\|PQ\| = k\|P'Q'\|$, dar $P, Q \in [ABC]$ deci $[ABC] \sim [A'B'C']$

9) Să se arate că oricarc două semdrepte sunt mulţimi congruente. Aceiaşi proprietale pentru drepte.

Soluţie:



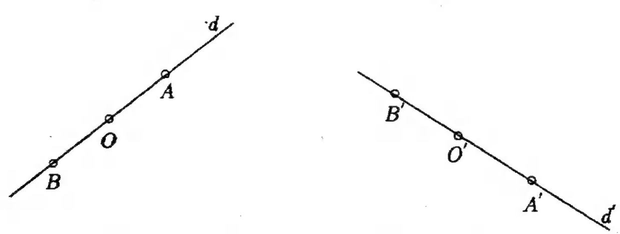
a) Fie $|OA$ şi $|O'A'$ două semidrepte. Fie $f : |OA \to |O'A'$ a.î. $f(O) = O'$ şi $f(P) = P'$ cu $\|OP\| = \|O'P'\|$. Punctul P' astfel construit este unic şi deci dacă $P \neq Q \Rightarrow \|OP\| \neq \|OQ\| \Rightarrow \|O'P'\| \neq \|O'Q'\| \Rightarrow P' \neq Q'$ şi $(\forall) P' \in |O'A'$ $(\exists)$ un singur punct $P \in |OA$ a.î. $\|OP\| = \|O'P'\|$

Funcţia construită este bijectivă.

Dacă $P, Q \in |OA$, $P \in |OQ| \to P'Q' \in |O'A'$ a.î. $\|OP\| = \|O'P'\|$; $\|OQ\| = \|O'Q'\| \Rightarrow$ $\|PQ\| = \|OQ\| - \|OP\| = \|O'Q'\| - \|O'P'\| = \|P'Q'\| (\forall) P; Q \in |OA$

$\Rightarrow$ cele două semidrepte sunt congruente.

b) Fie două drepte d şi d'.



Fie $O \in d$ şi $O' \in d'$. Construim o funcţie $f : d \to d'$ a.î. $f(O) = O'$ şi $f(|OA) = |O'A'$ şi $f(|OB) = |O'B'$ ca la punctul anterior. Se arată la fel că f este bijectivă şi că $\|PQ\| = \|P'Q'\|$

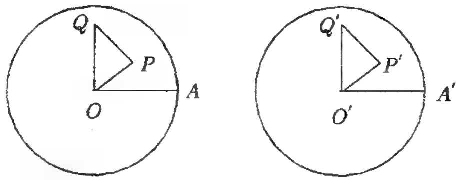
cînd P şi Q aparţin aceleiaşi semidrepte. Dacă P, Q aparţin la semdrepte diferite:

$$\left.\begin{array}{l}\|OP\| = \|O'P'\| \\ \|OQ\| = \|O'Q'\|\end{array}\right\} \Rightarrow \|PQ\| = \|OP\| + \|OQ\| = \|O'P'\| + \|O'Q'\| = \|P'Q'\|$$

şi deci cele două drepte sunt congruente.

10) Să se arate că două discuri avţnd aceiaşi rază sunt mulţimi congriente.

Soluţie:



Construim o funcţie $f : D \to D'$ a.î. $f(O) = O', f(A) = A'$ şi un punct $(\forall)\ P \in D \to P' \in D'$ considerate în sens pozitiv. Din ax. de construcţie a segmentelor şi unghiurilor $\Rightarrow$ că funcţia astfel construită este bijectivă, stabilind o corespondenţă biunivocă între elementele celor două mulţimi.

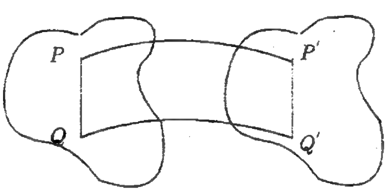
Fie $Q \in D \to Q' \in D'$ a.î. $\|OQ'\| = \|OQ\|$; $\widehat{AOQ} \equiv \widehat{A'O'Q'}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cum:}\|OP\| = \|O'P'\| \\ \|OQ\| = \|O'Q'\| \\ \widehat{POQ} \equiv \widehat{P'O'Q'} \ \text{(dif. de unghiuri congruente)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\widehat{OPQ} \equiv \widehat{P'O'Q'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\|, (\forall)\ P, Q \in D \Rightarrow D \equiv D'$$

11) Dacă funcţia $f : M \to M'$ este o izometrie, atunci funcţia inversă $f^{-1} : M' \to M$ este o asemenea isometrie.

Soluţie:



$f : M \to M'$ este o izometrie $\Rightarrow f$ este bijectivă şi $(\forall) P, Q \in M$ avem $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$ f-bijectivă $\Rightarrow f$ - inversabilă şi f^{-1}- bijecţie.

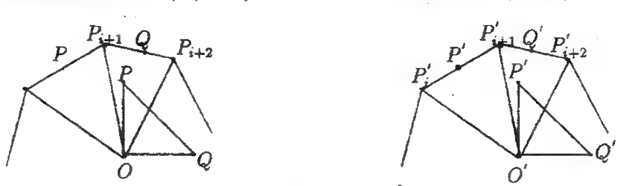
$$\left.\begin{array}{l}\|P'Q'\| = \|f(P); f(Q)\| = \|PQ\| \\ \|f^{-1}(P'); f^{-1}(Q')\| = \|f^{-1}(f(P)), f^{-1}(f(Q))\| = \|PQ\|\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|P'Q'\| = \|f^{-1}(P'), f^{-1}(Q')\|$, $(\forall)P', Q' \in M$, deci $f^{-1} : M' \to M$ este o izometrie.

12) Dacă poligoanele convexe $L = P_1, P_2, \ldots, P_n$ şi $L' = P_1', P_2' \ldots, P_n$ au $|P_i, P_{i+1}| \equiv \equiv |P_i', P_{i+1}'|$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$ şi $P_i\widehat{P_{i+1}}P_{i+2} \equiv P_i'\widehat{P_{i+1}'}P_{i+2}'(\forall)i = 1, 2, \ldots, n-2$ atunci $L \equiv L'$ şi $[L] \equiv [L']$

Soluţie:

Construim o funcţie f a.î. $f(P_i) = P_i'$, $i = 1, 2, \ldots, n$ şi dacă $P \in |P_i, P_{i+1}|$



Funcţia construită anterior o prelungim şi la interiorul poligonului astfel: Fie $O \in \text{int}.L \to O' \in \text{int}.L'$ a.î. $O\widehat{P_iP}_{i+1} \equiv O'\widehat{P_i'P}_{i+1}'$ şi $\|OP_i\| = \|O'P_i'\|$ aceste puncte le unim cu vîrfurile poligonului. Se demonstrează uşor că triunghiurile astfel obţinute sunt congruente respectiv.

Construim funcţia $g : [L] \to [L']$ a.î.

$$g(P) = \begin{cases} f(P), & \text{dacă } P \in L \\ O', & \text{dacă } P = 0 \\ P', & \text{dacă } P \in [P_iOP_{i+1}] \text{ a.î. } P_i\widehat{O}P \equiv P_i'\widehat{O'}P' \ \ (\forall)\, i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Funcţia astfel construită este bijectivă $(\forall)$ $P, Q \in [L]$ se poate demonstreze prin congruenţa triunghiurilor POQ şi $P'O'Q'$ că $\|PQ\| = \|P'Q'\|$ deci $[L] = [L']$

$\Rightarrow$ DACĂ DOUĂ POLIGOANE CONVEXE SE DESCOMPUN ÎN ACELAŞI NUMĂR DE TRIUNGHIURI RESPECTIV CONGRUENTE, ELE SÎNT CONGRUENTE

13) Să se arate că raportul perimetrelor a două poligoane asemenea este egal cu raportul lor de asemănare.

Soluţie:

$L = P_1P_2\ldots,P_n$

$L' = P_1'P_2'\ldots,P_n'$

$L \sim L' \Rightarrow (\exists)K > 0$ şi $f : L \to L'$ a.î. $\|PQ\| = k\|f(P)\ f(Q)\|(\forall)P,Q \in L, iar P_i' = f(P_i)$

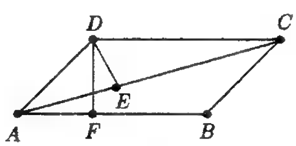
Luînd succesiv în rolul lui P şi Q vîrfurile obţinem:

$$\left.\begin{array}{ll}\|P_1P_2\| = k\|P_1'P_2'\| & \Rightarrow \dfrac{\|P_1P_2\|}{\|P_1'P_2'\|} = k \\ \|P_2P_3\| = k\|P_2'P_3'\| & \Rightarrow \dfrac{\|P_2P_3\|}{\|P_2'P_3'\|} = k \\ \vdots & \\ \|P_{n-1}P_n\| = k\|P_{n-1}'P_n'\| & \Rightarrow \dfrac{\|P_{n-1}P_n\|}{\|P_{n-1}'P_n'\|} = k \\ \|P_nP_1\| = k\|P_n'P_1'\| & \Rightarrow \dfrac{\|P_nP_1\|}{\|P_n'P_1'\|} = k\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\|P_1P_2\|}{\|P_1'P_2'\|} = \frac{\|P_2P_3\|}{\|P_2'P_3'\|} = \cdots = \frac{\|P_1P_2\| + \|P_2P_3\| + \cdots + \|P_{n+1}P_n\| + \|P_n'P_1'\|}{\|P_1'P_2'\| + \|P_2'P_3'\| + \cdots + \|P_{n+1}'P_n'\| + \|P_n'P_1'\|} = \frac{P}{P'}.$$

14) Paralelogramul ABCD are $\|AB\| = 6$, $\|AC\| = 7$ şi $d(D, AC) = 2$. Să se afle d(D,AB).

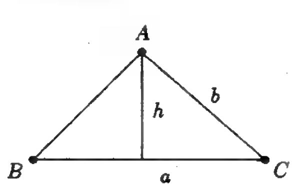
Soluţie:



$$\sigma[ADC] = \frac{2\cdot 7}{2} = 7$$
$$\sigma[ABCD] = 2\cdot 7 = 14 = 6\|DF\|$$
$$\Rightarrow \|DF\| = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

15) Dintre triunghiurile ABC cu $\|BC\| = a$ şi $\|CA\| = b, a$ şi b fiind numere date, să se afle un trunghi de arie maximă.

Soluţie:



$h = b\cdot \sin C \leq b$

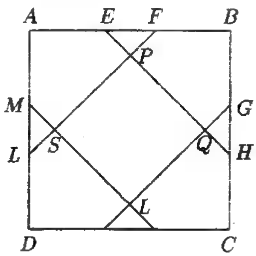
$\sigma[ABC] = \dfrac{a\cdot h}{2}$ este max cînd h este max.

h max $= b$ cînd $\sin C = 1$

$\Rightarrow m(C) = 90 \Rightarrow ABC$ este dr. în. C.

16) Se consideră un pătrat ABCD şi punctele E, F, G, H, I, K, L, M care împart fiecare latură în trei segmente congruente. Să se arate că $PQRS$ este un pătrat şi că aria lui este egală cu $\frac{2}{9}\sigma[ABCD]$.

Soluţie:



$\|MD\| = \|DI\| \Rightarrow MDI$ – Δ tr. isoscel

$\Rightarrow m(\widehat{DMI}) = m(\widehat{MID}) = 45°$

La fel $m(\widehat{FLA}) = m(\widehat{AFL}) = m(\widehat{BEH}) = m(\widehat{EHB})$.

$\|RK\| \Rightarrow \|SP\| = \|PQ\| = \|QR\| = \|RS\| \Rightarrow SRQP$ este pătrat.

$\|AB\| = a,\ \|AE\| = \dfrac{2a}{3}, \|MI\| = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9} + \dfrac{4a^2}{9}} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$

$$2\|RI\|^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow \|RI\|^2 = \frac{a^2}{18} \Rightarrow \|RI\| = \frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\|SR\| = \frac{2a\sqrt{2}}{3} - 2\frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{3};$$

$$\sigma[SRQP] = \frac{2a^2}{9} = \frac{2}{9}\sigma[ABCD]$$

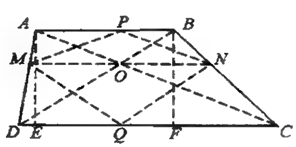
17) Diagonalele trapezului $ABCD(AB \parallel DC)$ se taie în O.

a) Să se arate că triunghiurile AOD şi BOC au aceeaşi arie;

b) Paralela prin O la AB taie AD şi BC în M şi N. Să se arate că $\|MO\| = \|ON\|$.

Soluţie:

a)



$$\left.\begin{array}{l} \sigma[ACD] = \dfrac{\|DC\| \cdot \|AE\|}{2} \\ \sigma[BCD] = \dfrac{\|DC\| \cdot \|BF\|}{2} \\ \|AE\| = \|BF\| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma[ACD] = \sigma[BCD]$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma[AOD] = \sigma[ACD] - \sigma[COD] \\ \sigma[BOC] = \sigma[BCD] - \sigma[COD] \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma[AOD] = \sigma[BOC]$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}\sigma[AOD]=\sigma[AMO]+\sigma[MOD]\\ \sigma[AMO]=\sigma[MPO]=\dfrac{\|MO\|\cdot\|OP\|}{2}\\ \sigma[MOD]=\sigma[MOQ]=\dfrac{\|OM\|\cdot\|OQ\|}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\sigma[AOD]=\frac{\|OM\|(\|OP\|+\|OQ\|)}{2}=\frac{\|OM\|\cdot h}{2}$$

La fel $\sigma[BOC]=\dfrac{\|ON\|\cdot h}{2}$

$$\sigma[AOD]=\sigma[BOC]\Rightarrow\frac{\|OM\|\cdot h}{2}=\frac{\|ON\|\cdot h}{2}\Rightarrow\|OM\|=\|ON\|$$

18) E fiind mijlocul laturii neparalele [AD] a trapezului ABCD, să se arate că $\sigma[ABCD]=$ $=2\sigma[BCE]$.

Soluţie:

$\|AE\|=\|ED\|$

Ducem $MN\perp AB;\ DC$

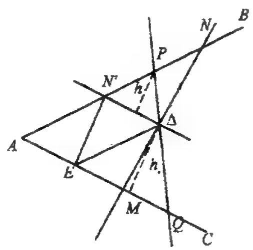
$\|EN\|=\|EM\|=\dfrac{h}{2}$

$$\sigma[BEC]=\frac{(\|AB\|+\|DC\|)\cdot h}{2}-\frac{\|DB\|\cdot h}{4}-\frac{\|DC\|\cdot h}{4}=\frac{(\|AB\|+\|DC\|)\cdot h}{4}=\frac{1}{2}\sigma[ABCD]$$

Deci $\sigma[ABCD]=2\sigma[BEC]$.

19) Se dau: un unghi $\widehat{BAC}$ şi un punct D în interiorul lui o dreaptă prin D taie laturile unghiului în M şi N. Să se determine dreapta MN a.î. aria $\triangle AMN$ să fie minimă.

Soluţie:



$\sigma[AEDN']$ este ct. pentru că A,E,D,N' sunt fixe. Fie o dreaptă oarecare prin D şi ducem $\|$ la laturile ND şi DE. Oricum duce prin D o dreaptă $\sigma[QPA]$ este formată din: $\sigma[AEDN]+\sigma[NPO]+\sigma[DEQ]$.

În toate triunghiurile PAQ avem $\sigma[AEDN]$ constant. Să studiem

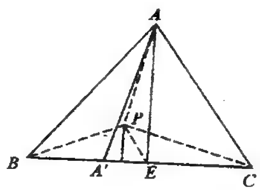
$$\sigma[PN'D]+\sigma[DEQ]=\frac{\|N'D\|\cdot h_1}{2}+\frac{\|EQ\|\cdot h_2}{2}=$$

$$= \frac{\|N'D\|}{2}\left(h_1 + \frac{\|EQ\|}{\|ND\|}\cdot h_2\right) = \frac{\|N'D\|}{2}\cdot\left(h_1 + \frac{h_2}{h_1}\cdot h_2\right) = \frac{\|N'D\|}{2h_1}\left[(h_1-h_2)^2 + 2h_1h_2\right]$$

este minim cînd $h_1 = h_2 \Rightarrow D$ se află la mijlocul lui $|PQ|$. Construcţia este deci: $\triangle ANM$ unde $NM \parallel EN'$. În acest caz avem $|ND| \equiv |DM|$.

20) Să se construiască un punct P în interioarul triunghiului ABC, a.î. triunghiurile PAB, PBC, PCA să aibe arii egale.

Soluţie:



$$\sigma[ABC] = \frac{\|BC\|\cdot\|AA'\|}{2}$$

Fie mediana $|AE|$ şi P centrul de greutate al triunghiului.

Fie $PD \perp BC$ $\quad \sigma[BPC] = \dfrac{\|BC\|\cdot\|PD\|}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} AA' \perp BC \\ PD \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \parallel PD \Rightarrow \triangle PDE \sim \triangle AA'E$$

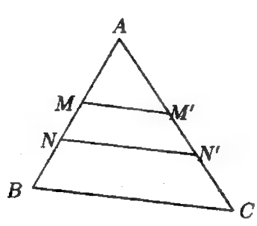
$$\Rightarrow \frac{\|PD\|}{\|AA'\|} = \frac{\|PE\|}{\|AE\|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \|PD\| = \frac{\|AA'\|}{3} \Rightarrow \sigma[BPC] = \frac{\|BC\|\cdot\dfrac{\|AA'\|}{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\|BC\|\cdot\|AA'\|}{2} = \frac{1}{3}\sigma[ABC]$$

La fel se demonstrează că $\sigma[PAC] = \sigma[PAB] = \dfrac{1}{3}\sigma[ABC]$ deci punctul este centrul de greutate.

21) Să se descompună o suprafaţă triunghiulară în trei suprafeţe de aceiaşi arie, prin paralele la o latură a triunghiului.

Soluţie:



Fie $M, N \in AB$ a.î. $M \in |AN|$

Ducem $MM' \parallel BC$

$$MN' \parallel BC$$

$$\triangle AMM' \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sigma[AMM']}{\sigma[ABC]} = \left(\frac{\|AM\|}{\|AB\|}\right)$$

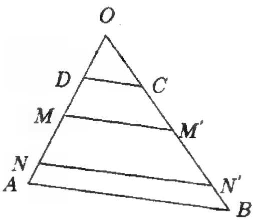
$$\sigma[AMM'] = \frac{1}{3}\sigma, \left(\frac{\|AM\|}{\|AB\|}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$\|AM\| = \frac{\|AB\|}{\sqrt{3}}; \Delta ANN' \sim \Delta ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\sigma[ANN']}{\sigma[ABC]} = \left(\dfrac{\|AN\|}{\|AB\|}\right)^2 \\ \sigma[ANN'] = \dfrac{2}{3}\sigma[ABC] \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\|AN\|}{\|AB\|}\right)^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \|AN\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\|AB\|$$

22) Rezolvaţi problema analoagă pentru un trapez.

Soluţie:



$\|OD\| = a, \|OA\| = b$

$\sigma[\Delta CM'M] = \sigma[MM'N'N] = \sigma[NN'BA] =$

$= \frac{1}{3}\sigma[ABCD]$

$$\Delta ODC \sim \Delta OAB \rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OAB]} = \frac{\|OD\|^2}{\|OA\|^2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OAB] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \qquad (1)$$

$$\Delta ODC \sim \Delta OMM' \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OMM']} = \left(\frac{\|OD\|}{\|OM\|}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OMM'] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{\|OM\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DCMM']} = \frac{a^2}{\|OM\|^2 - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\frac{1}{3}\sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{\|OM\|^2 - a^2}. \qquad (2)$$

$\Delta ONN' \sim \Delta ODC$

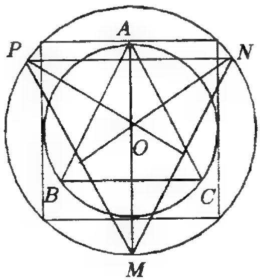
$$\frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DNN']} = \frac{\|OD\|}{\|ON\|} = \frac{a^2}{\|ON\|} \Rightarrow \frac{\sigma[IDC]}{\sigma[ONN'] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{\|ON\|^2} \Rightarrow. \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DCN'N]} = \frac{a^2}{\|ON^2\| - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\frac{2}{3}\sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{\|ON\|^2 - a^2}$$

împărţim (1) la (3): $\frac{2}{3} = \frac{\|ON\|^2 - a^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow 3\|ON\|^2 - 3a^2 = 2b^2 - 2a^2 \Rightarrow \|ON\|^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{3}$.

23) Prelungim razele duse la vîrfurile unui triunghi ecuilateral înscris într-un cerc $L(O, r)$, pînă la intersecţia cu cercul care trece prin vîrfurile unui pătrat circumscris cercului $L(O, r)$. Să se arate că punctele astfel obţinute sunt vîrfurile unui triunghi de aceiaşi arie cu hexagonul înscris în $L(O, r)$.

Soluţie:



$\|OA\| = r \to \|DE\| = 2r$

$\sigma_{hexagon} = \dfrac{3r^2\sqrt{2}}{2}$ (1)

$DEFO$ pătrat înscris în cercul de rază $R \Rightarrow$

$\Rightarrow l_4 = R\sqrt{2} = \|DE\| \Rightarrow P\sqrt{2} = 2r \Rightarrow R = r\sqrt{2}$

$\|OM\| = R = r\sqrt{2}$

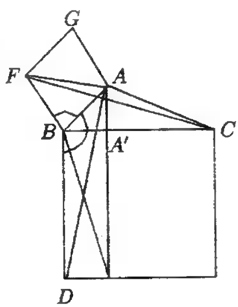
$$\sigma[OMN] = \frac{\|OM\| \cdot \|ON\| \sin 120}{2} = \frac{r\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma[MNP] = 3\sigma[OMN] = 3\frac{r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

(1) şi (2) $\Rightarrow \sigma[MNP] = \sigma_{hexagon}$.

24) Să se demonstreze teorema catetei cu ajutorul ariilor.

Soluţie:



$\|AB\|^2 = \|BC\| \cdot \|BA'\|$

Construim pătratele $BCED$ pe ip. şi $ABFG$ pe catetă.

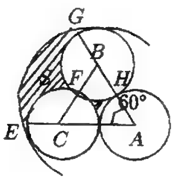
Ducem $AA' \perp BC$

$\sigma[ABFG] = \|AB\|^2$

$\sigma[A'BDH] = \|BD\| \cdot \|BA'\| = \|BC\| \cdot \|BA'\| \dots$

25) Se consideră un $\triangle$ echilateral ABC cu $\|AB\| = 2a$. Aria suprafeţei haşurate determinată de cercurile $L(A,a)$, $L(B,a)$, $L(C,a)$, $L(A,3a)$ este egală cu aria sectorului de cerc determinat de arcul mic $\widehat{EF}$ al cercului $L(C,a)$.

Soluţie:



$$\sigma(s_1) = \sigma[ABC] - 3\sigma[\text{sect. } ADH]$$

$$\sigma[ABC] = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

$$\sigma[\text{sect. } ADH] = \frac{r^2}{2} m(\widehat{DH})$$

$$m(\widehat{DH}) = \frac{\pi}{180} m(\widehat{DH}) = \frac{\pi}{180} \cdot 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\sigma[\text{sect. } ADH] = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$\sigma[s_1] = a^2\sqrt{3} - 3\frac{\pi a^2}{6} = a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{2} \qquad (1)$$

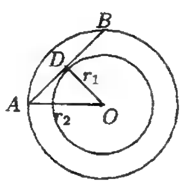
$$\sigma[s_2] = \sigma[\text{sect. } AEG] - \sigma[ABC] - \sigma[\text{sect. } ECF] - \sigma[\text{sect. } GBF] = \frac{(3a)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 60 - a^2\sqrt{3} -$$

$$- \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 120 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{9a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{3\pi a^2}{2} - \frac{2\pi a^2}{3} - a^2\sqrt{3} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ şi } (2) \Rightarrow \sigma[s_1] + \sigma[s_2] = \frac{3\pi a^2}{2} - \frac{2\pi a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{2\pi a^2}{6} = \frac{\pi a^2}{3}.$$

26) Să se arate că aria "coroanei circulare" cuprinse între cercurile $L(O, r_2)$ şi $L(O, r_1)$ este egală cu aria unui disc avînd diametrul segmentul de tangenţă la cercul $L(O, r_1)$ cu extremităţile pe cercul $L(O, r_2)$.

Soluţie:



$$\|AD\|^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$\sigma[L(O, r_1)] = \pi r_1^2$$

$$\sigma[L(O, r_2)] = \pi r_2^2$$

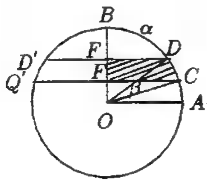
$$\sigma[\text{coroană circ.}] = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \qquad (1)$$

$$\sigma[\text{disc. diam. } \|AB\|] = \pi\|AD\|^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \qquad (2)$$

$$(1); (2) \Rightarrow \sigma[\text{disc}] = \sigma[\text{coroană}]$$

27) Fie $[OA]$, $[OB]$ două raze $\perp$ ale unui cerc de centru O. Pe arcul mic $\widehat{ABF}$ se iau punctele C şi D a.î. $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$ şi fie E, F proiecţiile lui CD pe OB. Să se arate că aria suprafeţei marginite de $[DF]$, $[FE$, $[EC]]$ şi arcul $\widehat{CD}$ este egală cu aria sectorului determinat de arcul $\widehat{CD}$ al cercului $C(O, \|OA\|)$.

Soluţie:



$$\sigma[CDEF] = \frac{\sigma[CDD'C']}{2}$$

$$\sigma[CDD'C'] = \sigma_{seg}[CDBD'C'] - \sigma[\text{seg } DBD']$$

Notăm: $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD}) = \alpha \Rightarrow m(\widehat{CD}) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$

$$\sigma_{\text{sect.}} = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$$

$$\sigma_s[CDBD'C'] = \frac{r^2}{2}[\pi - 2\alpha - \sin(\pi - 2\alpha)] = q\frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$\sigma_A = [DBD'] = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$\sigma[CDD'C'] = \sigma[CDBD'C'] - \sigma[DBD'] = \frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) =$$

$$= \frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha - 2\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{r^2}{2}(\pi - 4\alpha)$$

$$\Rightarrow \sigma[DCEF] = \frac{\sigma[CDD'C']}{2} = \frac{r^2}{4}(\pi - 4\alpha) = \frac{r^2}{2}(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) \qquad (1)$$

$$\sigma[\text{sect } COD] = \frac{r^2}{2}m(\widehat{CD}) = \frac{r^2}{2}(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) \qquad (2)$$

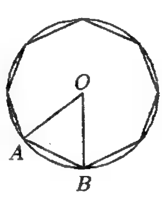
(1) şi (2) $\Rightarrow \sigma[CDEF] = \sigma[\text{sect.}COD]$.

$\|O_1F\| = \|OE\|$

$\sigma[\text{pătrat}] = \|DE\|^2 = \|OA\|^2 = \frac{bc}{2} = V[ABC]$

28) Să se afle aria octogonului regulat înscris într-un cerc de rază r.

Soluţie:



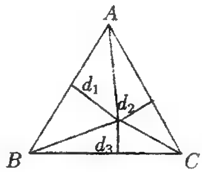
$$\mu(\widehat{AOB}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma[AOB] = \frac{r^2 \sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{r^2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{2}}{4}$$

$$\sigma(\text{ortogon}) = 8 \cdot \frac{r^2\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}r^2$$

29) Să se arate, folosind arii, ca suma distanţelor unui punct variabil situat în interiorul triunghiului echilateral ABC la laturile lui este constant.

Soluţie:



$\sigma[ABC] = \sigma[AMB] + \sigma[AMC] + \sigma[MBC] \Rightarrow$

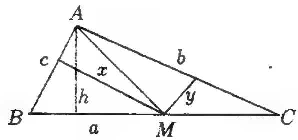
$\Rightarrow ah_a = ad_3 + ad_2 + ad_1 \Rightarrow$

$d_1 + d_2 + d_3 = h_a$ (a este latura $\triangle$ echilateral)

$\Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (pt. că $h_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$).

30) Se consideră un triunghi dat ABC şi un punct variabil $M \in |BC|$. Să se arate că între distanţele $x = d(M, AB)$ şi $y = d(M, AC)$ există o relaţie de forma $kx + ly = 1$, unde k şi l sunt constante.

Soluţie:



$ABC - \triangle dat \Rightarrow a, b, c, h$ sunt constante

$\sigma[ABC] = \dfrac{ah}{2}$

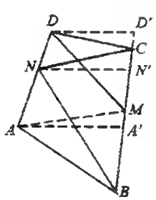
$\sigma[ABC] = \sigma[AMB] + \sigma[AMC] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ah}{2} = \frac{cx}{2} + \frac{by}{2} \Rightarrow cx + by = ab \Rightarrow \frac{c}{ah}x + \frac{b}{ah}y = 1 \Rightarrow kx + ly = 1$$

unde $k = \dfrac{c}{ah}$ şi $l = \dfrac{b}{ah}$.

31)Fie M şi N mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[AD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$ şi $\{P\} = AM \cap BN$ şi $Q = CN \cap ND$. Să se arate că aria patrulaterului $PMQN$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor ABP şi CDQ.

Soluţie:



Ducem $AA' \perp BC$; $NN' \perp BC$; $DD' \perp BC \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} AA' \parallel NN' \parallel DD' \\ \|AN\| = \|ND\| \end{array}\right\} \Rightarrow MN' \text{ linie mijlocie în trapezul } AA'D'D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|NN'\| = \frac{\|AA'\| + \|DD'\|}{2}$$

$$\sigma[BCN] = \frac{\|BC\| \cdot \|NN'\|}{2}$$

$$\sigma[BAM] + \sigma[MDC] = \frac{\|BM\| \cdot \|AA'\|}{2} + \frac{\|MC\| \cdot \|OD'\|}{2} \Rightarrow \|BM\| = \|MC\| = \frac{\|BC\|}{2} \Rightarrow$$

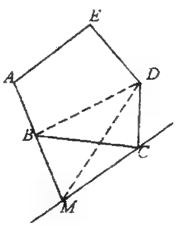
$$\Rightarrow \sigma[BAM] + \sigma[MDC] = \frac{\|BC\|}{2}\left(\frac{\|AA'\| + \|DD'\|}{2}\right) = \frac{\|BC\| \cdot \|NN'\|}{2} = \sigma[BCN]$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma[BCN] = \sigma[PMQN] + \sigma[BPM] + \sigma[MQC] \\ \sigma[BCN] + \sigma[MDC] = \sigma[BAP] + \sigma[BPM] + \sigma[MQC] + \sigma[CDQ] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma[PMQN] = \sigma[BPA] + \sigma[CDQ].$$

31) Să se construiască un triunghi de aceeaşi arie cu un pentagon dat.

Soluţie:



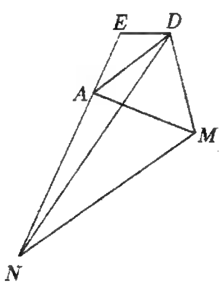
Se construieşte întîi un patrulater care are aceeaşi arie cu pentagonul dat. Ducem prin C a paralelă la BD şi prelungim $|AB|$ pînă intersectează paralela în M.

$\sigma[ABCDE] = \sigma[ABDE] + \sigma[BCD]$,

$\sigma[BCD] = \sigma[BDM]$(au vîrfurile pe o paralelă la bază).

Deci $\sigma[ABCDE] = \sigma[AMDE]$.

Apoi se consideră un triunghi care are aceeaşi arie cu patrulaterul $AMDE$.

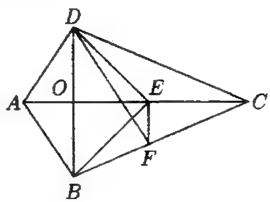


Ducem prin o paralelă la AD, N aparţine intersecţie cu aceeaşi paralelă

$\sigma[AMDE] = \sigma[ADE] + \sigma[ADE] = \sigma[ADE] + \sigma[ADN] =$
$= \sigma[EDN]$

32) Să se construiască o dreaptă care împarte o suprafaţă patrulateră convexă în două părţi de aceaşi arie.

Soluţie:



$\|AE\| = \|EC\|$

$\|EF \parallel BD \Rightarrow \sigma[BDF] = \sigma[BDE]$

$\sigma[ABFD] = \sigma[ABED]$ (1)

$\sigma[ADE] = \sigma[DEC]$ baze egale şi aceeaşi înalţime

$\sigma[ABE] = \sigma[BEC]$

$\sigma[ABED] = \sigma[BEDC]$ (2)

$\sigma[DEF] = \sigma[BEF]$ aceeaşi bază şi vîrfurile pe drepte paralele la bază.

$\sigma[DCF] \neq \sigma[DEC] + \sigma[ECF] + \sigma[DEF] \neq \sigma[DEC] + \sigma[ECF] + \sigma[BEF] = \sigma[BEDC]$ (3)

$(1), (2), (3) \Rightarrow \sigma[ABFD] = \sigma[DCF]$

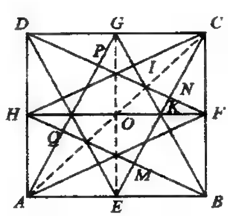
33) Într-un pătrat de latură 1 se uneşte mijlocul fiecarei laturi cu extremităţile laturi opuse. Să se afle aria octogonului interior convex care se formează în acest fel.

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta DCF \equiv \Delta CBE \Rightarrow \widehat{CFD} \equiv \widehat{CEB} \\ m(\widehat{CEB}) + m(\widehat{ECB}) = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{CFN}) + m(\widehat{ECB}) = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\widehat{CNF}) = 90^\circ \Rightarrow CE \perp DF$$

$$\left.\begin{array}{l} |CF| \equiv |EB| \\ m(\widehat{MBE}) = m(\widehat{NCF}) \\ m(\widehat{NEB}) + m(\widehat{CFN}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DCF \equiv \Delta BME \Rightarrow \begin{array}{l} |CN| \equiv |MB| \\ |NF| \equiv |ME| \end{array}$$



Se arată la fel că:

$$\left.\begin{array}{l} |CN| \equiv |NB| \equiv |AQ| \equiv |DP| \\ |NF| \equiv |ME| \equiv |NQ| \equiv |PE| \\ |CE| \equiv |NB| \equiv |AG| \equiv |DF| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PN| \equiv |NM| \equiv |QM| \equiv |PQ|$$

$\Rightarrow MNPQ$ romb cu unghi drept $\Rightarrow MNPQ$ pătrat.

$$\left.\begin{array}{l}|DG| \equiv |FB| \\ \widehat{DIG} \equiv \widehat{FIB} \\ \widehat{GDI} \equiv \widehat{FBI}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DGI \equiv \Delta DFI \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|GI| \equiv |IF| \\ |GC| \equiv |CF| \\ |IC| \equiv |IC| \text{ com.}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta GIC \equiv \Delta FIC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{GCI} \equiv \widehat{FCI} \Rightarrow I \in |AC|$$

La fel se arată că toate vîrfurile octogonului aparţin axelor de simetrie ale pătratului, deci ortogopnul este regulat.

$$\|CF\| = \frac{1}{2},\ \|RF\| = \frac{1}{4},\ \|CR\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

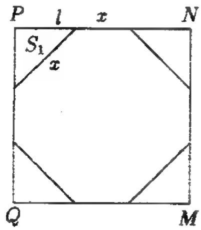
$$\|NF\| \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \|NF\| = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\|EC\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\|BM\| \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \|BM\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\|MN\| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5-1-2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Consider separat pătratul



$$2l^2 = 2x^2$$

$$x = l\sqrt{2}$$

$$2l + l\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$l(2+\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{5}(2+\sqrt{2})}$$

$$\sigma[QMNP] = \frac{1}{5}$$

$$S_1 = \frac{x^2}{2}$$

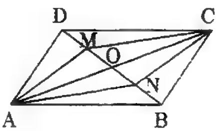
$$S = \sigma[QMNP] - 4S_1 = \frac{1}{5} - 2l^2 = \frac{1}{5} - 2\frac{1}{5(6+4\sqrt{2})} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5(3+2\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}-1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2(1+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{9-8} = \frac{2}{5}(3 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4) =$$

$$= \frac{2}{5}(\sqrt{2}-1).$$

34) Diagonala $[BD]$ a paralelogramului $ABCD$ se împarte prin punctele M, N în 3 segmente. Să se arate că AMCN este un paralelogram şi să se calculeze raportul dintre $\sigma[AMCN]$ şi $\sigma[ABCD]$.

Soluţie:



$\|OM\| = \|NM\| = \|NB\|$

$\|DC\|$? $\Rightarrow \Delta MOC = \Delta NBA \Rightarrow \|MC\| = \|AN\|$

La fel se arată că $\Delta DAM = \Delta BCN \Rightarrow \|AM\| = \|NC\|$

Deci $ANCM$ este paralelogram.

$$\sigma[AOB] = \frac{\|OA\| \cdot \|OB\| \sin\alpha}{2}$$

$$\sigma[AOD] = \frac{\|OA\| \cdot \|OD\| \sin(\pi - \alpha)}{2}$$

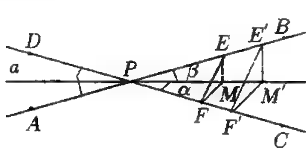
$$\sigma[ABCD] = \|OA\| \cdot \|OB\| \sin\alpha + \|OA\| \cdot \|OD\| \sin\alpha = \|OA\| \cdot \sin\alpha(\|OA\| + \|OD\|) =$$

$$= \|OA\| \cdot \|DB\| \cdot \sin\alpha$$

$$\sigma[ANCM] = \|OA\| \cdot \|MN\| \sin\alpha = \|OA\| \cdot \frac{\|DB\|}{3} \sin\alpha = \frac{\sigma[ABCD]}{3} \Rightarrow \frac{\sigma[AMCN]}{\sigma[ABCD]} = \frac{1}{3}$$

35) Se dau punctele A, B, C, D astfel încît $AB \cap CD = \{p\}$. Să se afle locul geometric al punctului M astfel ca: $\sigma[ABM] = \sigma[CDM]$.

Soluţie:



Pentru a determinăm unghiul α:

$\sin\alpha = \frac{\|EM\|}{\|MP\|}$, $\sin\beta = \frac{\|MF\|}{PM}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\|EM\|}{\|MF\|} = k \Rightarrow \sin\alpha = k\sin(a - \alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\alpha = k \sin a \cos\alpha + k \cos a \sin\alpha$$

Notez $t = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2} = k \sin a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + k\frac{2t}{1+t^2} \cdot \cos a \Rightarrow kt^2 \cos a \cdot +2(1 - k\cos a) \cdot t -$

$-k \sin a = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{k\cos a - 1 \pm \sqrt{(k-1)^2 + 2k(1-\cos a)}}{k \cos a}$ deci am stabilit astfel poziţiile dreptelor locului geometric.

$$\sigma[ABM] = \frac{\|AB\| \cdot \|ME\|}{2}$$
$$\sigma[CDM] = \frac{\|CD\| \cdot \|MF\|}{2}$$

$\sigma[ABM] = \sigma[CDM] \Rightarrow \|AB\| \cdot \|ME\| = \|CD\| \cdot \|MF\| \Rightarrow \dfrac{\|ME\|}{\|MF\|} = \dfrac{\|CD\|}{\|AB\|}$ constant pentru ca A, B, C, D - puncte fixe.

Trebuie deci găsit locul geometric al punctelor M astfel încît raportul distanţelor de la acest punct la două drepte concurente să fie constant.

$\dfrac{\|ME\|}{\|MF\|} = k$. Fie M' încă un punct cu aceeaşi proprietate, adică

$\dfrac{\|M'E'\|}{\|M'F'\|} = k$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} ME \perp AB \\ M'E' \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow ME \parallel M'E' \\ \left.\begin{array}{l} MF \perp CD \\ M'F' \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow MF \parallel M'F' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{EMF} \equiv \widehat{E'M'F'} \\ \dfrac{\|ME\|}{\|MF\|} = \dfrac{\|M'E'\|}{\|M'F'\|} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MEF \sim \triangle M'E'F' \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rr} \Rightarrow \widehat{FEM} \equiv \widehat{F'E'M'} \Rightarrow \widehat{PEF} \equiv \widehat{PE'F'} \Rightarrow & \dfrac{\|PE\|}{\|PE'\|} = \dfrac{\|EF\|}{\|E'F'\|} \\ \text{dar} & \dfrac{\|EF\|}{\|E'F'\|} = \dfrac{\|EM\|}{\|E'M'\|} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\|PE\|}{\|PE'\|} = \dfrac{\|EM\|}{\|E'M'\|} \\ \widehat{PEM} \equiv \widehat{PE'M'} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PEM \sim \triangle PE'M' \Rightarrow \widehat{EPM} \equiv \widehat{E'PM'} \Rightarrow P, M, M' \text{ coliniare} \Rightarrow$$

locul geometric este o dreaptă ce trece prin P.

Cînd punctele se află în $\sphericalangle CPB$ se obţine încă o dreaptă ce trece prin P. Deci locul geometric este format din două drepte concurente prin P, din care se scoate punctul P, întruncît distanţele de la P la ambele drepte sunt 0 şi raportul lor este nedeterminat.

Reciproc, dacă punctele N şi N' se află pe aceeaşi dreaptă ce trece prin P, raportul distanţelor lor la dreptele AB şi CD este constant.

$$\left.\begin{array}{l} ME \parallel M'E' \Rightarrow \triangle PME \sim \triangle PM'E' \Rightarrow \dfrac{\|EM\|}{\|E'M'\|} = \dfrac{\|PM\|}{\|PM'\|} \\ MF \parallel M'F' \Rightarrow \triangle PMF \sim \triangle PM'F' \Rightarrow \dfrac{\|FM\|}{\|F'M'\|} = \dfrac{\|PM\|}{\|PM'\|} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} = \frac{\|FM\|}{\|F'M'\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|FM\|} = \frac{\|E'M'\|}{\|F'M'\|} = k$$

36)Problemă analogă în cazul $AB \parallel CD$.

Soluţie:

Se arată la fel ca în problema precedentă că:

$$\frac{\|ME\|}{\|MF\|} = k \Rightarrow \frac{\|ME\|}{\|MF\| + \|ME\|} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|ME\| = \dfrac{kd}{k+1}$, iar locul geometric al punctelor care se află la o distanţă constantă de o dreaptă dată este o paralelă la dreapta respectivă situată între cele două paralele.

Dacă $\|AB\| > \|CD\| \Rightarrow d(MAE) < d(MCD)$.

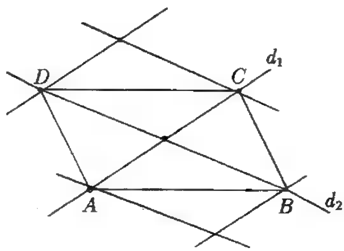
Atunci dacă $\dfrac{ME}{MF} = k \Rightarrow \dfrac{ME}{MF - ME} = \dfrac{k}{1-k} \Rightarrow \dfrac{ME}{d} = \dfrac{k}{1-k} \Rightarrow ME = \dfrac{kd}{1-k}$, deci se obţine încă o paralelă la AB.

37) Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se afle locul geometric al punctului x_1 din interiorul $ABCD$ astfel încît $\sigma[ABM] + \sigma[CDM] = k$, k - o constantă. Pentru ce valori ale lui k locul geometric căutat nu este mulţimea vidă?

GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

1) Să se găsească locul geometric al punctelor astfel încît suma distanţelor la două drepte concurente să fie constantă, egală cu l.

Soluţie:



Fie d_1 şi d_2 cele două drepte concurente. Ducem 2 drepte paralele cu d_1 situate de o parte şi de alta a ei la distanţa l. Acestea intersectează pe d_2 în D şi B care vor fi puncte ale locului geometric căutat, întruncît suma distanţelor $d(B,d_1) + d(B,d_2) = l + 0$ verifică condiţia din enunţ.

Ducem două drepte paralele cu d_2 situate la distanţa l de ea care taie pe d_1 în A şi C care de asemenea sunt puncte ale locului geometric căutat. Paralele echidistante determină pe d_2 segmente congruente $\Rightarrow \begin{matrix} |DO| \equiv |OB| \\ |AO| \equiv |OC| \end{matrix}$ la fel deci ABCD este paralelogram.

$$\text{În } \triangle BOC, \left.\begin{matrix} \|CC'\| = d(C,d_2) = l \\ \|BB'\| = d(B,d_1) = l \end{matrix}\right\} \Rightarrow \|CC'\| = \|BB'\| \Rightarrow \triangle BOC \text{ este isoscel}$$

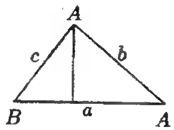
$\Rightarrow \|OC\| = \|OB\| \Rightarrow ABCD$ este dreptunghi. Orice punct M am lua de pe laturile acestui dreptunghi avem $\|R_1, d_1\| + \|M, d_2\| = l$, folosind proprietatea că suma distanţelor de la un punct de pe baza unui triunghi isoscel la laturi este constant şi egal cu înălţimea ce pleacă dintr-un vîrf al bazei, adică l. Deci locul căutat este dreptunghiul ABCD.

2) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $b\cos C + c\cos B = a$

b) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$

Soluţie:



În $\triangle ABC : \cos B = \dfrac{\|BD\|}{c} \Rightarrow \|BD\| = c\cos B$

În $\triangle ADC : \cos C = \dfrac{\|DC\|}{b} \Rightarrow \|DC\| = b\cos C$

Deci $a = \|BD\| + \|DC\| = c\cos B + b\cos C$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow \begin{cases} b = m\sin B \\ c = m\sin C \end{cases}$$

$$b\cos B + c\cos C = m\sin B\cos B + m\sin C\cos C = \frac{m}{2}(2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C) =$$

$$= \frac{m}{2}(\sin 2B + \sin 2C) = \frac{m}{2}\cdot 2\sin(B+C)\cos(B-C) = \frac{a}{\cancel{\sin A}}\cancel{\sin}(\pi - A)\cos(B-C) =$$

$$= a\cos(B-C).$$

3) Să se arate că între unghiurile triunghiului ABC avem:

a) $b\cos C - c\cos B = \dfrac{b^2 - a^2}{a}$

b) $2(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C) = a^2 + b^2 + c^2$

Soluţie:

a) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ şi $\cos B = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac}$

$$b\cos C - c\cos B = b\cdot\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c\cdot\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2}{2a} =$$

$$= \frac{2b^2 - 2c^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

b) tot din teorema cosinusului $\Rightarrow 2bc\cos A + 2ac\cos B + 2ab\cos C = 2bc\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} +$

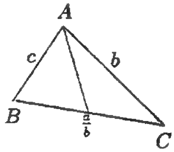
$$+2ac\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + 2ab\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

4) Folosind teorema cosinusului să se arate că:

$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$ unde m_a este lungimea medianei corespunzătoare laturii de lungime a.

Soluţie:

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{2}c\cos B$$



$$4m_a^2 = 4c^2 + a^2 - 4ac\cos B = 4c^2 + a^2 -$$

$$-4ac\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = 4c^2 + a^2 - 2a^2 - 2c^2 + 2b^2 =$$

$$= 2c^2 + 2b^2 - a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$$

5) Să se arate că triunghiul ABC în care $\dfrac{a+c}{b} = \operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$ este dreptunghic.

Soluţie:

În teorema sinusului $\Rightarrow a = m\sin A$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow b = m\sin B$$

$$c = m\sin C$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{m\sin A + m\sin C}{m\sin B} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} =$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2})\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \\ \operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{B}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = \frac{B}{2}$$

$$\frac{A-C}{2} = -\frac{B}{2} \Rightarrow A-B=C \text{ sau } A-C=B \Rightarrow \begin{array}{c} A=B+C \\ \text{sau} \\ A+B=C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 2A=180^\circ \\ \text{sau} \\ 2C=180^\circ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=90^\circ \\ \text{sau} \\ C=90^\circ \end{array}$$

6) Să se arate că, dacă în trunghiul ABC avem $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2\operatorname{ctg} C \Rightarrow a^2+b^2=2c^2$

Soluţie:

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2\operatorname{ctg} C \Rightarrow \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = 2\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow \sin A = \frac{a}{m}, \sin B = \frac{b}{m}, \sin C = \frac{c}{m}$; înlocuind obţinem

$$2c^2 = 2(a^2+b^2-c^2) \Rightarrow 2c^2 = a^2+b^2$$

7) Să se determine elementele necumoscute ale triunghiului ABC fiind date:

a) A, B şi p

b) $a+b=m, A$ şi B

c) $a, A;\ \ b-c=\alpha$

Soluţie:

a) Folosind teorema sinusilor $\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$

$$= \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$a = \frac{2p\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}; b = \frac{2p\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} c = \frac{2p\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

iar $C = \pi - (A+B)$

b) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{m}{\sin A + \sin B} \Rightarrow a = \frac{m\sin A}{\sin A + \sin B}$

$$b = \frac{m\sin B}{\sin A + \sin B} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{a\sin(A+B)}{\sin A}$ dar $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

c) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin B} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C} = \frac{d}{\sin B - \sin C} = \frac{a}{sin A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin B - \sin C = \frac{d\sin A}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = \frac{d\sin A}{a}$$

$$B+C = \pi - A \Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$$

Deci:

$$2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}=\frac{d}{a}2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\Rightarrow\sin\frac{B-C}{2}=\frac{d}{a}\cos\frac{A}{2}$$

Se rezolvă sistemul, se află B şi C. Apoi se află $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$ şi $c=b-d$.

8) Să se arate că în orice triunghiul ABC avem

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}\quad\text{(teorema tangenţelor)}$$

Soluţie:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=m\Rightarrow\begin{array}{l}a=m\sin A\\ b=m\sin B\end{array}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{m\sin A-m\sin B}{m\sin A+m\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

9) În triunghiul ABC se dă $\hat{A}=60°$ şi $\dfrac{b}{c}=2+\sqrt{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}$ şi unghiurile B şi C.

Soluţie:

Folosind teorema tangentelor

$$\frac{b-c}{b+c}=\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$\hat{A}\in 60°\Rightarrow m\left(\frac{A}{2}\right)=30°\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

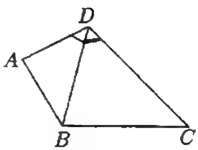
$$\frac{b}{c}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\frac{b-c}{b+c}=\frac{2+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}+1}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=1\Rightarrow\mu\left(\frac{B-C}{2}\right)=45°\Rightarrow\begin{cases}B-C=90°\\ B+C=120°\end{cases}$$

$2B=210°\Rightarrow\mu(B)=105°\Rightarrow\mu(C)=120°-105°=15°$ deci $\mu(C)=\dfrac{\pi}{12}$ şi $\mu(B)=\dfrac{7\pi}{12}$.

10) Într-un patrulater convex $ABCD$ se dau $\|AD\| = 7(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\|CD\| = 13$, $\|BC\| =$ $= 15, C = \arccos\frac{33}{65}$ şi $D = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{5}{13}$. Se cer celelalte unghiuri ale patrulaterului şi $\|AB\|$.

Soluţie:



$$\|BD\|^2 = 13^2 - 15^2 - 2\cdot 13\cdot 15\cos C = 13^3 + 15^2 - 2\cdot 13\cdot 15\frac{33}{65} =$$

$$= 13^2 + 15^2 - 2\cdot 13\cdot 15\cdot\frac{3\cdot 11}{13\cdot 5} = 13^2 + 15^2 - 18\cdot 11 = 196 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|BD\| = 14$$

În $\triangle BDC$ avem:

$$\frac{14}{\sin C} = \frac{15}{\sin\widehat{BDC}} \Rightarrow \sin\widehat{BDC} = \frac{15\cdot\sin C}{14}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \frac{33^2}{65^2}} = \sqrt{\frac{(65-33)(65+33)}{65^2}} = \sqrt{\frac{2^6\cdot 7^2}{65^2}} = \frac{56}{65}$$

$$\sin\widehat{BDC} = \frac{15\cdot\frac{56}{65}}{14} = \frac{15\cdot 56}{14\cdot 65} = \frac{3\cdot 5\cdot 14\cdot 4}{14\cdot 5\cdot 13} = \frac{12}{13}$$

$$\cos 2\widehat{BDC} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\sin\widehat{BDC} = \arccos\frac{5}{13}$$

$$\sin\widehat{ADB} = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{5}{13} - \arccos\frac{5}{13} = \frac{\pi}{4}.$$

În $\triangle ADB \Rightarrow \|AB\|^2 = 49(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + 14^2 - 2\cdot 14\cdot 7(\sqrt{6}-\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} = 49(6+2-2\sqrt{2})+$ $+196 - 93(\sqrt{2}-2) = 98(4-\sqrt{12}) - 98(\sqrt{12}-2) + 196 = 98(4-\sqrt{12}-\sqrt{12}+2) + 196 =$ $= 196(3-\sqrt{12}) + 196 = 196(4-2\sqrt{3}) = 196(\sqrt{3}-1)^2,$

$$\|AB\| = 14(\sqrt{3}-1)$$

În $\triangle ADB$ aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{\|AD\|}{\sin\widehat{ABD}} = \frac{\|AB\|}{\sin\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{7(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sin\widehat{ABD}} = \frac{14(\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$$

$$\sin ABD = \frac{7(\sqrt{1}-2)}{28(\sqrt{3}-1)} = \frac{14(\sqrt{3}-1)}{28(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2} = \mu(\widehat{ABD}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\mu(A) = A - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{12\pi - 2\pi - 3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\mu(D) = 2\pi - \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{5}{13} - \arccos\frac{33}{65} = \frac{14\pi}{12} - (\underbrace{\arccos\frac{5}{13}}_{\alpha} + \underbrace{\arccos\frac{33}{65}}_{\beta})$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{15} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cos\beta = \frac{33}{65} \Rightarrow \sin\beta = \frac{56}{65}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{5}{13}\cdot\frac{33}{65} - \frac{12}{13}\frac{56}{65} = -\frac{507}{13\cdot 65} = -\frac{3\cdot 13^2}{13\cdot 13\cdot 5} = -\frac{3}{5}$$

$$\alpha+\beta = \pi - \arccos\frac{3}{5}$$

$$\mu(D) = \frac{14\pi}{12} - \pi + \arccos\frac{3}{5} = \frac{2\pi}{12} + \arccos 35 = \frac{\pi}{6} + \arccos 35$$

Sau se află $\mu(\widehat{DBC})$ şi se adună cu $\frac{\pi}{6}$.

11) Să se calculeze aria $\triangle ABC$ atunci cînd:

a) $a = 17,\ B = \arcsin\frac{24}{25}, C = \arcsin\frac{12}{13}$

b) $b = 2, \widehat{A} \in 135°, \widehat{C} \in 30°$

c) $a = 7, b = 5, c = 6$

d) $\widehat{A} \in 18°, b = 4, c = 6$

Soluţie:

a) $B = \arcsin\frac{24}{25} \Rightarrow \sin B = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos B = \frac{7}{25}$

$C = \arcsin\frac{12}{13} \Rightarrow \sin C = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos C = \frac{5}{13}$

$$\sin A = \sin[\pi - (B+C)] = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B = \frac{24}{25}\cdot\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\cdot\frac{7}{25} =$$

$$= \frac{120+84}{325} = \frac{204}{325}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{289 \cdot \frac{24}{25} \frac{12}{13}}{2 \cdot \frac{204}{325}}$$

b) $b = 2, \widehat{A} \in 135°, \widehat{C} \in 30° \Rightarrow \widehat{B} \in 15°$

$\sin A = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin C = \frac{1}{2}$

$$\sin B = \sin \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{4 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2 \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

d) $\widehat{A} \in 18°, b = 4, c = 6$

$\mu(A) = \frac{\pi}{10} 0$

$2\widehat{A} = 36°, 3\widehat{A} \in 54°$

$\sin \alpha = \cos(90° - \alpha)$

$\sin 30° = \cos 54° \Rightarrow \sin 2A = \cos 3A \Rightarrow 2 \sin A \cos A = \cos(4 \cos^2 A - 3) \Rightarrow$

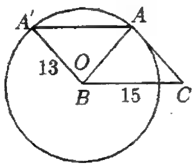
$\Rightarrow 4 \sin^2 A + 2 \sin A - 1 = 0$

$$\sin A = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$\sin A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ într-uncît $m(A) < 180$ şi $\sin A > 0$

12) Cîte triunghiuri distincte sub aspectsimetric există astfel încît $a = 15,\ c = 13,\ s = 24$

Soluţie:



$$\frac{ac\sin B}{2} = 24 \Rightarrow \sin B = \frac{48}{15\cdot 13} = \frac{16}{65}$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \frac{16^2}{65^2}} = \sqrt{\frac{(65-16)(65-16)}{65^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{49\cdot 81}{65^2}} = \frac{7\cdot 9}{65} = \frac{63}{65}$$

$$b^2 = 13^2 + 15^2 - 2\cdot 13\cdot 15\cdot \frac{7\cdot 9}{13\cdot 5} = 13^2 + 15^2 - 376 = 394 - 378 = 16,$$

$$b = 4$$

$$b^2 = 13^2 + 15^2 + 2\cdot 13\cdot 15\cdot \frac{7\cdot 9}{13\cdot 5} = 394 + 378 = 772 = 4\cdot 193$$

$$b = 2\sqrt{193}.$$

13) Să se afle aria $\triangle ABC$, dacă $a = \sqrt{6}, \hat{A} \in 60^\circ, b + c = 3 + \sqrt{3}$.

Soluţie:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow 6 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} 6 = (b+c)^2 - 2bc - bc = (b+c)^2 - 3bc \\ b + c = 3 + \sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (3+\sqrt{3})^2 - 3bc = 6$$

$$9 + 6\sqrt{3} + 3 - 3bc = 6 \Rightarrow 2(1+\sqrt{3}) = bc$$

$$\left.\begin{aligned} b + c &= 3 + \sqrt{3} \\ bc &= 2 + 2\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + p = 0 \Rightarrow x^2 - (3+\sqrt{3})x + 2 + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3+\sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{(3-1)^2}}}{2} = \frac{3+\sqrt{3} \pm (\sqrt{3}-1)}{2} \Rightarrow$$

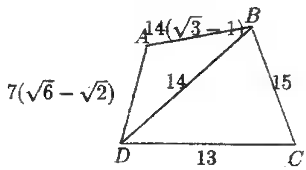
$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 + \sqrt{3} \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Deci $b = 1 + \sqrt{3}$ şi $c = 2$ sau $b = 2$ şi $c = 1 + \sqrt{3}$

$$2p = \sqrt{6} + 1 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6} \Rightarrow p = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

14) Să se afle aria patrulaterului din problema 9.



$\|AD\| = 7(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$\|CD\| = 13, \quad \|BC\| = 15$

La problema 9 s-a aflat

$\|BD\| = 14, \|AB\| = 14(\sqrt{3} - 1)$

Se află cu formula lui Heron aria fiecărui triunghi şi se adună

$\sigma[ABCD] = \sigma[ABD] + \sigma[BDC]$

15) Dacă S_n este aria poligonului regulat cu n laturi, să se calculeze: $S_3; S_4; S_6; S_8; S_{12}; S_{20}$ în funcţie de R, raza cercului circumscris poligonului.

Soluţie:

$S_n = \dfrac{n}{2}R^2 \sin\dfrac{2\pi}{n}$ formula pentru aria poligonului regulat.

$$n = 3 \Rightarrow S_3 = \frac{3}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

$$n = 4 \Rightarrow S_4 = \frac{4}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{4} = 2R^2$$

$$n = 6 \Rightarrow S_6 = \frac{6}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

$$n = 8 \Rightarrow S_8 = \frac{8}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{8} = 2\sqrt{2}R^2$$

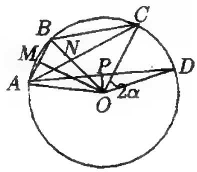
$$n = 12 \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{12} = 3R^2$$

$$n = 20 \Rightarrow S_20 = \frac{20}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{20} = 10R^2\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)R^2$$

16) Să se calculeze aria poligonului regulat $ABCD \ldots M$ înscris în cercul de rază R, ştiind că:

$$\frac{1}{\|AB\|} = \frac{1}{\|AC\|} + \frac{1}{\|AD\|}.$$

Soluţie:



$m(\widehat{AB}) = 2d \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 2d$

În $\triangle BOM$

$$\sin\alpha = \frac{\|BM\|}{\|BO\|} \Rightarrow \begin{array}{l} \|BM\| = R\sin\alpha \\ \|AB\| = 2R\sin\alpha \end{array} \qquad (1)$$

În $\triangle NOC : \sin 2\alpha = \dfrac{\|NC\|}{\|OC\|} \Rightarrow \|NC\| = R\sin 2\alpha \Rightarrow \|AC\| = 2R\alpha \qquad (2)$

În $\triangle POD : \sin 3\alpha = \dfrac{\|DP\|}{\|OD\|} \Rightarrow \|DP\| = R\sin 3\alpha$

$\|AD\| = 2R\sin 3\alpha \qquad (3)$

Înlocuind (1), (2), (3) în relaţia dată:

$$\frac{1}{2R\sin\alpha} = \frac{1}{2R\sin 2\alpha} = \frac{1}{2R\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha}$$

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha} \Rightarrow 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha =$$

$$= \sin 3\alpha \Rightarrow \sin 4\alpha = \sin 3\alpha \Rightarrow \sin 4\alpha - \sin 3\alpha = 0 \Rightarrow 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2} = 0 \Longleftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = 0 \text{ sau}$$

$\cos\dfrac{7\alpha}{2} = 0.$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0$ **imposibil**

$\cos\dfrac{7\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{7\alpha}{0} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{7} \Rightarrow m(\widehat{AB}) = \dfrac{2\pi}{7}$

$$n = \frac{m(\text{cerc întreg})}{m(\widehat{AB})} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7.$$

Deci poligonul are 7 laturi.

$$S_7 = \frac{7}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{7}$$

17) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $r = (p-a)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{A}{2}$;

b) $S = (p-a)\ \mathrm{tg}\ \dfrac{A}{2}$;

c) $p = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

d) $p-a = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

e) $m_a^2 = R^2(\sin^2 A + 4\cos A\sin B\sin C)$

f) $h_a = 2R\sin B\sin C$

Soluţie:

a) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}} \Rightarrow\ \mathrm{tg}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

$$(p-a)\ \mathrm{tg}\frac{A}{2} = (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}} = \frac{9}{p} = r$$

b) $\dfrac{S}{p} = (p-a)\ \mathrm{tg}\dfrac{A}{2} \Rightarrow S = p(p-a)\ \mathrm{tg}\dfrac{A}{2}$

c) $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}},\ \cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ac}}, \cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}}, R = \dfrac{abc}{4S} \Rightarrow 4R = \dfrac{abc}{S}$

$$4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{abc}{S}\cdot\sqrt{\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}} = \frac{abc}{S}\frac{\sqrt{p^3()p-a(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{abc}{S}$$

$$\frac{pS}{abc} = p$$

d) $4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{abc}{S}\cdot\sqrt{\dfrac{p(p-a)^3(p-b)(p-c)}{bcacab}} = \dfrac{abc}{S}\cdot\dfrac{p-a}{abc}$

$$S = p-a$$

$\sin A = \dfrac{a}{2R},\ \sin B = \dfrac{b}{2R},\ \sin C \doteq \dfrac{c}{2R}$

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$R^2(\sin^2 A + 4\cos A\sin B\sin C) = R^2\left(\dfrac{a^2}{4R^2} + 4\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c}{2R}\right) =$

$$= R^2\frac{a^2+2b^2+2c^2-2a^2}{4R^2} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = {\mu_a}^2$$

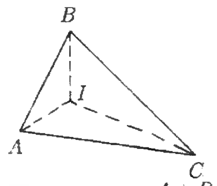
f) $S = \frac{ah_a}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a},\ R = \frac{abc}{4S},\ \frac{b}{2R} = \sin B,\ \frac{c}{2a} = \sin C$

$$2R\sin B\sin C = 2R\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R} = \frac{bc}{2R} = \frac{bc}{2\cdot\frac{abc}{4S}} = \frac{2bcS}{abc} = \frac{2S}{a} = h_a$$

17) Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC să se arate că

$$\|AI\| = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Soluţie:



Aplicăm teorema sinusurilor în $\triangle ABI$:

$$\frac{\|AI\|}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\|BI\|}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\|AB\|}{\sin\widehat{BIA}}$$

$$m(\widehat{BIA}) = 180^\circ - \frac{A+B}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{c}{2} = 90^\circ + \frac{c}{2}$$

$$\sin\widehat{BIA} = \sin(90^\circ + \frac{c}{2}) = \sin(180^\circ - 90^\circ - \frac{c}{2}) = \sin(90^\circ - \frac{c}{2}) = \cos\frac{c}{2}$$

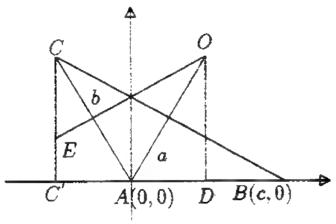
Teorema sinusurilor aplicată în $\triangle ABC$

$$\frac{\|AB\|}{\sin C} = 2R \Rightarrow \|AB\| = 2R\sin C = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\frac{1}{\cos\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

18) Să se demonstreze teorema sinusurilor utilizînd metoda analitică

Soluţie:



În $\triangle ACC'$: $\sin(180^\circ - A) = \frac{\|CC'\|}{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|CC'\| = b\sin A; \cos(180^\circ - A) = b\cos A$.

Deci coordonatele lui C sunt $(-b\cos A, b\sin A)$

Centrul cercului circumscris se află la intersecţia perpendicularelor duse prin mijlcurile laturilor AB şi AC.

$$m_{EO} = -\frac{1}{m_{AC}} = \frac{1}{\text{tg } A} = \text{ ctg } A$$

$$E\left(\frac{O - b\cos A}{2}, \frac{O + b\sin A}{2}\right) = E\left(-\frac{b\cos A}{2}, \frac{b\sin A}{2}\right)$$

Ecuaţia dreptei $EO : y - y_0 = m(\lambda - x_0) \Rightarrow y - \frac{b\sin A}{2} = \text{ ctg } A(x + \frac{b\cos A}{2})$

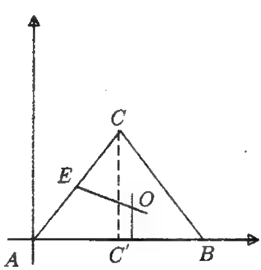
$$R = \|OA\| = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2\sin A} + \frac{c\cos A}{2\sin A}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2 A} + 2 \cdot \frac{bc\cos A}{4\sin^2 A} + \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{4}\left(1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right) + \frac{1}{4\sin^2 A}(b^2 + 2bc\cos A)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\sin^2 A}(c^2 + b^2 + 2bc\cos A)} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2 A}} =$$

$$= \frac{a}{2\sin A} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A}$$



Calculul refăcut pentru acelaşi desen dă:

$(b\cos A, b\sin A)$

$$m_{AC} = \text{ tg} A \Rightarrow m_{OE} = -\frac{1}{\text{tg } A}$$

$(OE) : 2\sin A = -2x\cos A + B$

$O\left(\frac{c}{2}, \frac{-c\cos A + b}{2\sin A}\right)$ şi $\|OA\| = R =$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^2 + c^2\cos A - 2bc\cos A}{4\sin^2 A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\sin^2 A} \cdot (c^2\sin^2 A + c^2\cos^2 A + b^2 - 2bc\cos A)} = \frac{a}{2\sin A},$$

folosind teorema cosinusului.

19) Folosind teorema sinusurilor să se arate că într-un triunghi la latura mai mare se opune unghiul mai mare.

Soluţie:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C} = 2R$$

Presupunem $a > b$. Să demonstrăm că $A > B$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B} \\ a > b \Rightarrow \dfrac{a}{b} > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} > 1 \Rightarrow A, B, C \in (0, \pi) \Rightarrow \sin B > 0$$

$$\Rightarrow \sin A > \sin B \Rightarrow \sin A - \sin B > 0 \Rightarrow 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} > 0 \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} =$$

$$= 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2} = \cos(90^{circ} - \frac{C}{2}) = \sin\frac{C}{2} > 0 \text{ deci şi } \frac{A-B}{2} > 0 \Rightarrow \frac{A-B}{2} > 0 \Rightarrow A > B$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

20) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $\dfrac{a\cos C - b\cos B}{a\cos B - b\cos A} + \cos C = 0, \quad a \neq b$

b) $\dfrac{\sin(A-B)\sin C}{1 + \cos(A-B)\cos C} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

c) $(a+c)\cos\dfrac{B}{4} + a\cos\left(A + \dfrac{3B}{4}\right) = 2c\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{4}$

Soluţie:

a) $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B$

$$\frac{2R\sin A\cos A - 2R\sin B\cos B}{2R\sin A\cos B - 2R\sin B\cos A} + \cos C = cosC + \frac{\sin A\cos A - \sin B\cos B}{\sin A\cos B - \sin B\cos A} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2A - \frac{1}{2}\sin 2B}{\sin(A-B)} + \cos C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin(A-B)\cos(A+B)}{\sin(A-B)} + \cos C =$$

$$\cos(A+B) + \cos C = \cos(180^\circ - C) + \cos C = -\cos C + \cos C = 0$$

b) Transformăm produsul în sumă:

$$\sin(A-B)\sin C = \frac{\cos(A-B-C) - \cos(A-B+C)}{2} = \frac{1}{2}[-\cos 2A + \cos 2B] =$$

$$(B + C = 180^\circ - A, \quad A + C = 180^\circ - B)$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{4R^2}; \qquad (1)$$

$$1 + \cos(A - B)\cos C = 1 + \frac{\cos(A - B + C) + \cos(A - B + C)}{2} \stackrel{*}{=}$$

$$= \frac{2 + \cos(180 - 2B) + \cos(2A - 180)}{2}$$

$$(A + B = 180° - B, \quad B + C = 180° - A)$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{2 - \cos 2B - \cos 2A}{2} = \frac{2 - 1 + 2\sin^2 B - 1 + 2\sin^2 A}{2} = \sin^2 A + \sin^2 B = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4R^2} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ şi } (2) \Rightarrow \frac{\frac{a^2 - b^2}{4R^2}}{\frac{a^2 + b^2}{4R^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$c)(a + c)\cos\frac{B}{4} + b\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right) = a\cos\frac{B}{4} + b\cos\frac{B}{4} + b\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right) = c\cos\frac{B}{4} +$$

$$+ a\cos\left(B - \frac{3B}{4}\right) + b\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right)$$

Considerăm ultimii 2 termeni:

$$a\cos\left(B - \frac{3B}{4}\right) + b\cos\left(A + \frac{3B}{4}\right) = 2R\sin A\cos\left(B - \frac{3B}{4}\right) + 2R\sin B\cos\left(A - \frac{3B}{4}\right) =$$

$$= 2R\left(\frac{\sin\left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin\left(A - B + \frac{3B}{4}\right)}{2} + \frac{\sin\left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin\left(A - B + \frac{3B}{4}\right)}{2}\right) =$$

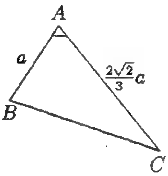
$$= R\left[\sin\left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin\left(A + B + \frac{3B}{4}\right) + \sin\left(A - B + \frac{3B}{4}\right) + \sin\left(A - B + \frac{3B}{4}\right)\right] =$$

$$= 2R\sin(A + B)\cos\frac{3B}{4} - 2R\sin(\pi - C)\cos\frac{3B}{4} + 2R\sin c\cos\frac{3B}{4} = c\cos\frac{3B}{4} + c\cos\frac{3B}{4} =$$

$$= c\left(\cos\frac{B}{4} + \cos\frac{3B}{4}\right) = 2c\cos\frac{B}{4} + \cos 3B4 = 2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

21) În triunghiul $ABC, A \in 45°, \|AB\| = a, \|AC\| = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$. Să se arate că tg $B = 2$.

Soluţie:



Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABC:

$$\|BC\|^2 = a^2 + \frac{8}{9}a^2 - 2a\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 + \frac{8a^2}{9} - \frac{4a^2}{3} = \frac{5a^2}{9}$$

$$\|BC\| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 - 2\|AB\|\|BC\|\cos B \Rightarrow \frac{8a^2}{9} = a^2 + \frac{5a^2}{9} - 2a\cdot\frac{a\sqrt{5}}{3}\cdot\cos B$$

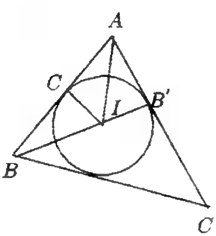
$$\Rightarrow \frac{2a^2\sqrt{5}\cos B}{2} = a^2 + \frac{5a^2}{9} - \frac{8a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow \cos B = \frac{6a^2}{9}\cdot\frac{3}{2a^2}\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\frac{5}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\mathrm{tg}\ B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{5}} = 2$$

22) Fie A', B', C' puncte de tangenţă ale cercului înscris unui triunghi ABC cu laturile acestuia. Să se arate că $\dfrac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \dfrac{r}{2R}$

Soluţie:



$$\|IA\| = \|IB\| = \|IC\| = r$$

$$\left.\begin{array}{l} IC'\perp AB \\ IA'\perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow IA'B'C' \text{ patrulater iscriptibil } \Rightarrow$$

$$m(A'IC') = 180 - \hat{B} \Rightarrow \sin(\widehat{A'IC'}) = \sin\hat{B}$$

La fel $\sin\widehat{A'IB'} = \sin C$ şi $\sin\widehat{C'IB'} = \sin A$

$$\sigma[B'C'I] = \frac{r^2\sin A}{2}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sigma[B'C'I] = \frac{r^2\frac{a}{2R}}{2} = \frac{r^2a}{4R}$$

Analog $\sigma[A'B'I] = \dfrac{r^2}{4R}(a+b+c)$

$$\sigma[ABC] = s = rp$$

$$\frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{r^2(a+b+c)}{4R} \Rightarrow \frac{1}{rp} = \frac{r}{2R}$$

23) Să se arate că în orice triunghi ABC $\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Soluţie:

$$0 < A \Rightarrow < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{A}{2} > 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \Rightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} \\ \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\frac{b^2-a^2+c^2}{2bc}}{2} =$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} \leq \frac{a^2}{4bc} \Rightarrow \sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

24) Să se rezolve triunghiul ABC cucunoscîndu-i elementele A, B şi aria S.

Soluţie:

$$C = \pi - (A+B)$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A} \\ A, B, C \text{ cunoscute} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Se află } a$$

$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a\sin B}{\sin A}$. La fel se află c.

25) Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd $a = 13, A = \arccos\frac{4}{5}$ şi mediana corespunzîtoare laturii a, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{15\sqrt{3}}$

Soluţie:

$$A = \arccos\frac{4}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

Teorema cosinusului $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow 169 = 841 - 2bc\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8bc}{5} = 841 - 169 \Rightarrow$

$$\Rightarrow bc = 420$$

$$\left.\begin{array}{r} b^2+c^2 = 841 \\ bc = 420 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 21 \\ c = 20 \end{array}\right. \text{ sau } \left\{\begin{array}{l} b = 20 \\ c = 21 \end{array}\right.$$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin A}{a}$ se află B

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$\sin B = \frac{21 \cdot \frac{3}{5}}{13} = \frac{63}{65} \Rightarrow B = \arcsin\frac{63}{65}$$

$$C = 180^\circ - \left(\arccos\frac{4}{5} + \arcsin\frac{63}{65}\right) = 180^\circ - \left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{63}{65}\right)$$

Se calculează suma.

Sau

$$\sin B = \frac{20 \cdot \frac{3}{5}}{13} = \frac{12}{13} \Rightarrow B = \arcsin\frac{12}{13}$$

$$C = 180^\circ - \left(\underbrace{\arcsin\frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin\frac{12}{13}}_{\beta}\right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{63}{65} \Rightarrow \alpha + \beta = \arcsin\frac{63}{65}$$

$$C = 180^\circ - \arcsin\frac{63}{65}$$

26) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC ştiind că $B - C = \frac{2\pi}{3}$ şi $R = 8r$ unde R şi r sunt razele cercurilor circumscrise şi înscrise în triunghi.

Soluţie:

$$R = 8r \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{8}$$

Ştim deja că $\Rightarrow \frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} = 4\sin\frac{A}{2}\frac{\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{6} - \cos\frac{180^\circ - A}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{8} = \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{A}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2\sin\frac{A}{2}\left(\frac{1}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)$$

Notăm $sin\frac{A}{2} = t$. Avem

$$\frac{1}{8} = 2t\left(\frac{1}{2} - t\right) = t - 2t^2$$

$$1 = 8t - 16t^2 \Rightarrow 16t^2 - 8t + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$4t - 1^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{4};\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8}\Rightarrow A=\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\begin{cases} B+C=\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{15}}{8} \\ B-C=\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$ din acest sistem se află B şi C.

$$2B=\frac{5\pi}{3}-\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$B=\frac{5\pi}{6}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$C=B-\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{15}8=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$$

PROBLEME DIVERSE

1) Să se determine mulţimea punctelor din plan ale căror coordonatele afine z satisfac:

$a)|z| = 1;$

$b)\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2};\ z \neq 0;$

$c)\arg z > \frac{4\pi}{3},\ z \neq 0;$

$d)|z+i| \leq 2$

Soluţie:

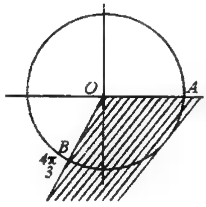
$$\left.\begin{aligned} &a)|z| = 1 \\ &|z| = \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \text{ deci mulţimea căutată este cercul } C_{(0,1)}$$

$b)\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}.$

Mulţimea căutată este dată de toate punctele cadranului III la care se adaugă semidreapta $|Oy$, deci toate punctele cu $x < 0, y < 0$

c)

$$\left.\begin{aligned} &\arg z > \frac{4\pi}{3}, z \neq 0 \\ &\arg z \in [0, 2\pi] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < \arg z < 2\pi$$



$$x_B = \cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$y_B = \sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$m_{OB} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow OB : y = \sqrt{3}x$$

Mulţimea căutată este mulţimea punctelor interioare ale unghiuri cu laturile semiaxă pozitivă şi semidreapta $|OB$.

$d)|z+i| \leq 2$

$z = x + yi$ imaginea sa geometrică M.

$z + i = x + yi + i = x + (y+1)i$

$|z+i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq 2 \Rightarrow \|O'M\| \leq 2 \Rightarrow x^2 + (y+1)^1 \leq 4 \Rightarrow \|O'M\|^2 \leq 4$

unde $O'(0, -1)$.

Deci mulţimea căutată este discul de centru $O'_{(0,-1)}$ şi rază 2.

2) Să se demonstreze că rădăcinile de ordin n ale unităţii sunt egale cu puterile rădăcini particulare ε_1

Soluţie:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\varepsilon_k = \cos\, k\frac{2\pi}{n} + i\sin k\frac{2\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = {\varepsilon_1}^k, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1$$

3) Ştiind că numărul complex z verifică ecuaţia $z^4 = n$, să se arate că numerele $2, -iz$ şi iz verifică această ecuaţie.

Aplicaţie: Să se calculeze $(1-2i)^4$ şi să se deducă rădăcinile de ordin 4 ale numărului $-7 + 24i$.

Soluţie:

Fie ecuaţia $z^4 = n$. Dacă $z^4 = 4$ (este z soluţie) atunci: $(-z)^4 = (-1)^4 z^4 = 1 \cdot n = n$ deci şi $-z$ este soluţie.

$(iz)^4 = i^4 z^4 = 1 \cdot n = n \Rightarrow iz$ este soluţie

$(-iz)^4 = (-i)^4 z^4 = 1 \cdot n = n \Rightarrow$ deci $-iz$ este soluţie

$(1-2i)^4 = [(1-2i)^2]^2 = (1 - 4i + 4i^2)^2 = (1 - 4 - 4i)^2 = (-3+4i)^2 = 9 + 24i - 16 =$

$= -7 + 24i \Rightarrow z = 1 - 2i$ este soluţie a ecuaţiei $z^4 = -7 + 24i$.

Soluţiile acestei ecuaţii sunt:

$z_k = \sqrt[4]{-7+24i}$, $k = 0, 1, 2, 3$ dar pe baza primei părţi, dacă $z = 1 - 2i$ este rădăcină atunci $-z = -1 + 2i, iz = 2 + i, -iz = -2 - i$ sunt soluţii ale ecuaţiei date.

4) Să se arate că dacă numerele naturale m şi n sunt prime între ele, atunci ecuaţiile $z^m - 1 = 0$ şi $z^n - 1 = 0$ au o singură rădăcina comună.

Soluţie:

$$z^m - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[m]{1} \Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}, \quad k = 0, \ldots, m-1$$

$$z^n - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[n]{1} \Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Dacă există k şi k' cu $z_k = z_{k'}$, atinci

$\dfrac{2k\pi}{m} - \dfrac{2k'\pi}{n} = 2p\pi = mn|k'm - kn \Rightarrow n|k',\ m|k$, deoarece $(m,n) = 1$. Cum $k' < n,\ k < m$ avem $k' = o,\ k = 0$.

Deci rădăcina comună este z_0.

5) Să se rezolve următoarea ecuaţie binomă: $(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0$.

Soluţie:

$$(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0 \Rightarrow z^6 = \frac{-1-5i}{2-3i} = 1 - i$$
$$r = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} t = -1, t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow t = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{6}\right); \quad k \in 0, \ldots, 5$$

6) Să se rezolve ecuaţia:

$$a)\ \left.\begin{array}{c} z^6 - 9z^3 + 8 = 0 \\ z^3 = y \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 - 9y + 8 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z^3 = 8 \\ z^3 = 1 \end{array}\right. \quad \text{etc.}$$

$$b)\ \left.\begin{array}{c} z^8 - 2z^4 + 2 = 0 \\ z^4 = y \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z^4 = 1 + i \\ z^4 = 1 - i \end{array}\right. \quad \text{etc.}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{c} z^4 + 6(1+i)z^2 + 5 + 6i = 0 \\ z^2 = y \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 + 6(1+i)y + 5 + 6i = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-6(1+i) \pm \sqrt{-20+48i}}{2} = \frac{-6(1+i) \pm \sqrt{(4+6i)2}}{2} \text{ etc.}$$

7) Să se rezolve ecuaţia:

$\bar{z} = z^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{l} z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \bar{z} = x - iy \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |z| = |\bar{z}|$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Cum } \bar{z} = z^{n-1} \Rightarrow |\bar{z}| = |z|^{n-1} \\ |z| = |\bar{z}| \end{array}\right\} \Rightarrow |z| = |z|^{n-1} \Rightarrow |z|\cdot(1-|z|^{n-2}) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |z| = 0 \\ |z|^{n-2} - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Din $|z| = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ şi $y = 0 \Rightarrow z = 0 + 0i$

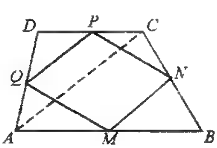
Din $|z|^{n-2} - 1 = 0 \Rightarrow (|z| - 1)(\underbrace{|z|^{n-3} + |z|^{n-4} + \ldots + 1}_{\text{pozitiv}}) = 0 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{array}\right\} \Rightarrow z\bar{z} = x^2 + y^2 = 1$$

Ecuaţia dată define $\bar{z} \cdot z = z^n \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

8) Mijloacele laturilor unui patrulater oarecare sunt vîrfurile unui paralelogram.

Soluţie:



$A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$

$$\Rightarrow M\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right), N\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right), P\left(\frac{z_3+z_4}{2}\right), Q\left(\frac{z_4+z_1}{2}\right)$$

Facem suma abscicelor punctelor opuse:

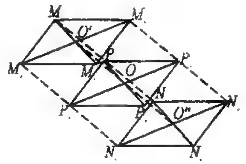
$$\frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1+z_4}{2} = \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{2}$$

$$\frac{z_2+z_3}{2} + \frac{z_4+z_1}{2} = \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{2}$$

Deci $\frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_3+z_4}{2} = \frac{z_2+z_3}{2} + \frac{z_4+z_1}{2} \Rightarrow MNPQ$ parelelogram.

9) Fie $M_1M_2M_3M_4$ şi $N_1N_2N_3N_4$ două paralelograme şi P_i mijloacele segmentelor $[M_iN_i]$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Să se arate că $P_1P_2P_3P_4$ este un paralelogram sau un paralelogram degenerat.

Soluţie: (sintetică)



În patrulaterul $M_1M_3N_3N_1$ prin unirea mujloacelor se obţine paralelogramul $O'P_1O''P_3$, ale cărui diagonale se vor intersecta în O, mijlocul lui $|O'O''|$ şi deci

$|P_1O| \equiv |OP_3|$ (1)

În patrulaterul $M_4M_2N_2N_4$ prin unirea mijloacelor laturilor se obţine paralelogramul $O'P_2O''P_4$, ale cărui diagonale se vor intersecta în O, mijlocul lui $|O'O''|$ deci

şi $|P_2O| \equiv |P_4O|$ (2)

Din (1) şi (2)$\Rightarrow$ $P_1P_2P_3P_4$ paralelogram.

9) Fie funcţia $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, f(z) = az + b; (a, b, c \in \mathbf{C}, a \neq 0)$. Dacă M_1 şi M_2 sunt de afixe z_1 şi z_2, iar M_1' şi M_2' sunt de afixe $f(z_1), f(z_2)$ să se arate că $\|M_1'M_2'\| = |a| \cdot \|M_1M_2\|$. Avem $\|M_1'M_2'\| = \|M_1M_2\| \Leftrightarrow |a| = 1$.

Soluţie:

$\|M'M\| = |z - z'|$, deci $\|M_1M_2\| = |z_2 - z_1|$

$\|M_1M_2\| = |f(z_2) - f(z_1)| = |az_2 + b - az_2 - b| = \|az_2 - az_1| = |a(z_2 - z_1)| = |a| \cdot |z_2 - z_1| =$
$= |a| \cdot \|M_1M_2\|$

Dacă $|a| = 1 \Rightarrow \|M_1'M_2'\| = \|M_1M_2\|$

$$\text{Dacă} \quad \left.\begin{array}{r} \|M_1'M_2'\| = \|M_1M_2\| \\ \|M_1'M_2'\| = |a| \cdot \|M_1M_2\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|M_1M_2\| = |a| \cdot \|M_1M_2\| \Rightarrow |a| = 1$$

10) Arătaţi că funcţia $z \to \bar{z}, z \in \mathbf{C}$ defineşte o izometrie.

Soluţie:

$z = x + iy, \; \bar{z} = x = iy$

Fie M_1şi M_2 de afixe z_1 şi z_2. Imaginile lor prin funcţia dată sunt M_1' şi M_2' cu afixele $\bar{z}_1$ şi $\bar{z}_2$, deci $f(z_1) = \bar{z}_1, \; f(z_2) = \bar{z}_2$

$\|M_1M_2\| = |z_2 - z_1| = |x_2 + iy_2 - x_1 - iy_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (1)

$\|M_1'M_2'\| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \|M_1M_2\| = \|M_1'M_2'\|$ sau $\|M_1'M_2'\| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| =$
$= \|M_1M_2\|$

Deci $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = \bar{z}$ defineşte o izometrie pentru că se păstrează distanţa dintre puncte.

11) Fie M_1, M_2 de afixe $z_1, z_2 \neq 0$ şi $z_2 = \alpha z_1$. Să se arate că semidreptelr $|OM_1, |OM_2$ coincid (respectiv sunt opuse) $\Leftrightarrow \alpha > 0$(respectiv $\alpha < 0$).

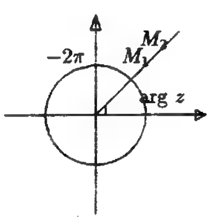
Soluţie:

Se ştie că argumentul $(\alpha z_1) = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi$ unde $k = 0$ sau $k = 1$. Cum $\arg z_2 =$
$= \arg(\alpha z_1)$, $\arg z_2 = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi$.

a) Presupunem că $|OM_1 = |OM_2 \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \arg \alpha = 2k\pi$, $\arg \in [0, 2\pi] \Rightarrow \arg \alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in |Ox$ (poz.)$\Rightarrow \alpha > 0$.

Reciproc, $\alpha > 0 \Rightarrow \arg \alpha = 0 \Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 - 2k\pi \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$ sau $\arg z_2 =$
$= \arg z_1 - 2\pi \Rightarrow |OM_1 = |OM_2$.

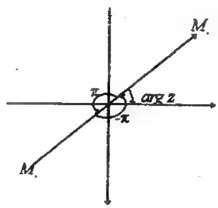


b) Fie $|OM_1$ şi $|OM_2$ opuse $\Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 + \pi$

$\Rightarrow \arg z_1 + \pi = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi \Rightarrow \arg \alpha = \pi \Rightarrow \alpha \in$ semidreptei negative $|Ox' \Rightarrow \alpha < 0$.

Reciproc, $\alpha < 0 \Rightarrow \arg \alpha = \pi \Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 + \pi - 2k\pi$

$$k = 0 \text{ sau } k = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \arg z_2 = \arg z_1 + \pi \\ \text{sau} \\ \arg z_2 = \arg z_1 - \pi \end{array}\right\} \Rightarrow |OM_1 \text{ şi } |OM_2 \text{ sunt opuse.}$$



12) Se consideră punctele M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2, z_3 şi $M_1 \neq M_2$. Să se arate că:

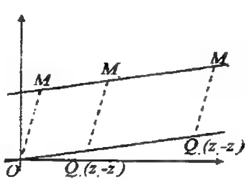
a) $M_3 \in |M_1M_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0$

b) $M_3 \in M_1M_2 \Leftrightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbf{R}$

Soluţie:

Dacă n şi n' sunt imaginile geometrice ale numerelor complexe z şi z' atunci imaginea diferenţei $z - z'$ este construită pe $|OM'|$ şi $|M'M|$ ca laturi.

a) Presupunem $M_3 \in |M_1M_2$



Construim imaginea geometrică a lui $z_2 - z_1$. Este al patrulea vîrf al paralelogramului $OM_1M_2Q_1$. Imaginea geometrică a lui $z_3 - z_1$ este Q_2, al patrulea vîrf al paralelogramului $OM_1M_3Q_2$

$$\left.\begin{array}{l} OQ_1 \| M_1M_2 \\ OQ_2 \| M_1M_3 \\ M_1M_2M_3 \text{ colin.} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \text{ coliniare} \Rightarrow$$

$$|OQ_1 = |OQ_2 \Rightarrow z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1) \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \alpha \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0$$

Reciproc: presupunem $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0 \Rightarrow \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = k > 0 \Rightarrow z_3 - z_1 = k(z_2 - z_1),\ k > 0$

$$\left.\begin{array}{l} OQ_1 = |OQ_2 \\ M_1M_2 \parallel OQ_1 \\ M_1M_3 \parallel OQ_2 \end{array}\right\} \Rightarrow |M_1M_2 = |M_1M_3 \Rightarrow M_3 \in |M_1M_2$$

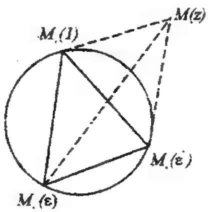
Dacă M_3 şi $M_2 \in$ semidreptei opuse faţă de O, atunci $z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$ cu $\alpha < 0$.

Se repetă raţionamentul de la punctul anterior pentru acelaşi caz.

Deci cînd $M_3 \in M_1M_2, M_1 + M_2$ se vor pbţine pentru raportul respectiv pozitiv, negativ sau avînd $M_3 = M_1$, deci $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbf{R}$.

13) Demonstraţi teorema lui Pompeiu. Dacă punctul M din planul triunghiului echilateral $M_1M_2M_3 \notin$ cercului circumscris $\Delta M_1M_2M_3 \Rightarrow$ există un triunghi avînd lungimile laturilor $\|MM_1\|$, $\|MM_2\|$, $\|MM_3\|$.

Soluţie:



Imaginile rădăcinilor de ordin 3 ale unităţii sunt vîrfurile unui triunghi echilateral.

$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \varepsilon_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Dar $\varepsilon_1 = {\varepsilon_2}^2$, deci dacă notăm $\varepsilon_2 = \varepsilon$, atunci $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$.

Deci $M_1(1), M_2(\varepsilon), M_3(\varepsilon^2)$.

Se foloseşte egalitatea:

$(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) = (2 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)$ adecvată $(\forall) z \in \mathbf{C}$

$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| = |(z - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)|$

Dar $|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \leq |(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)|$

$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \geq |(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| - |-(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)|$

Deci:

$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \geq |(z - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)|$

$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2| \geq |z - \varepsilon^2| \cdot |1 - \varepsilon|$

$\varepsilon = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \varepsilon^2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon = i\sqrt{3} = 0 + i\sqrt{3} \Rightarrow |\varepsilon^2 - \varepsilon| = \sqrt{3}$

$1 - \varepsilon^2 = -1 - \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $|1 - \varepsilon^2| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$

$1 - \varepsilon = 1 - \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$|1-\varepsilon| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$

Înlocuind:

$|z-1|\cdot\sqrt{3}+|z-\varepsilon|\cdot\sqrt{3} \geq |z-\varepsilon^2|\cdot\sqrt{3}$

$|z-1|+|z-\varepsilon| \geq |z-\varepsilon^2|$ dar $\|MM_1\| = |z-1|$; $\|MM_2\| = |z-\varepsilon|$; $\|MM_3\| = |z-\varepsilon^2|$,

deci $\|MM_1\| + \|MM_2\| \geq \|MM_3\|$ deci $\|MM_1\|, \|MM_2\|, \|MM_3\|$ pct. şi laturile unui Δ.

Apoi folosim $||x|-|y|| \leq |x-y|$ şi se obţine cealaltă inegalitate.

PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Să se afle poziţia celui de al treilea vîrf al triunghiului echilateral afixele a doua vîrfuri fiind $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$

Soluţie:

$$M_1 - z_1 = 1$$
$$M_2 - z_1 = 2 + i$$
$$M_1 - z_1 = x + yi$$

$\triangle M_1M_2M_3$ echilateral $\Rightarrow \|M_1M_2\| = \|M_1M_3\| = \|M_2M_3\| \Rightarrow |z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ (1-x)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 2 - x$

$$x^2 + 4 + x^2 - 4x - 2x = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$$

Deci: $M_3\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ sau $M_3\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Există deci 2 soluţii.

2) Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe, nenule,+două cîte 2 şi de module egale. Să se demonstreze că dacă $z_1 + z_2z_3, z_2 + z_3z_1,\ z_2 + z_1z_3 \in \mathbf{R} \Rightarrow z_1z_2z_3 = 1$.

Soluţie:

$$z_1 = r(\cos t_1 + i \sin t_1)$$
$$z_2 = r(\cos t_2 + i \sin t_2) \qquad z_1 \neq z_2 \neq z_3 \Rightarrow t_1 \neq t_2 \neq t_3$$
$$z_3 = r(\cos t_3 + i \sin t_3)$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2z_3 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_1 + r\sin(t_2 + t_3) = 0 \\ z_2 + z_3z_1 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_2 + r\sin(t_1 + t_3) = 0 \\ z_3 + z_1z_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_3 + r\sin(t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t_1(1 - r\cos t) + r\sin t \cdot \cos t_1 = 0 \\ \sin t_2(1 - r\cos t) + r\cos t \cdot \cos t_2 = 0 \qquad\qquad t_1 \neq t_2 \neq t_3 \\ \sin t_3(1 - r\cos t) + r\sin t \cdot \cos t_3 = 0 \end{cases}$$

Aceste egalități sunt simultan adevărate numai decă $1 - r \cdot \cos t = 0$ şi $r \cdot \sin t = 0$, cum $r \neq 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = o \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow 1 - r = 0 \Rightarrow r = 1$ deci $z_1 z_2 z_3 = 1 \cdot (\cos 0 + \sin 0) = 1$

3) Notăm cu G mulţimea rădăcinilor de ordin n ale unității, $G = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}\}$. Să se demonstreze că:

a) $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in G, (\forall) i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

b) $\varepsilon_i^{-1} \in G, (\forall) i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

a)$\varepsilon_k = \frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$\left.\begin{aligned} \text{Deci } \varepsilon_i &= \cos\frac{2i\pi}{n} + i\sin\frac{2i\pi}{n} \\ \varepsilon_j &= \cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon_i\varepsilon_j = \cos\frac{2\pi(i+j)}{n} + i\sin\frac{2\pi(i+j)}{n}, i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

1) $i + j < n - 1 \Rightarrow i + j = k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\} \Rightarrow \varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_k \in G$

2) $i + j = n \Rightarrow \varepsilon_i\varepsilon_j = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 = \varepsilon_0 \in G$

3) $i + j > n \Rightarrow i + j = n \cdot m + r,\ 0 \leq r < n,\ \varepsilon_i\varepsilon_j = \cos\frac{2\pi(n \cdot m + r)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n \cdot m + r)}{n} =$
$= \cos\left(2\pi m + \frac{2\pi r}{n}\right) + i\sin\left(2\pi m + \frac{2\pi r}{n}\right) = \cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n} = \varepsilon_r \in G$

b) $\varepsilon_i = \cos\frac{2\pi i}{n} + i\sin\frac{2\pi i}{n}$

$$\varepsilon_i^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_i} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{\cos\frac{2\pi i}{n} + i\sin\frac{2\pi i}{n}} = \cos\left(-\frac{2\pi i}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi i}{n}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi i}{n}\right) +$$

$$+ i\sin\left(2\pi - \frac{2\pi i}{n}\right) = \cos\frac{2\pi n - 2\pi i}{n} + i\sin\frac{2\pi n - 2\pi i}{n} = \cos\frac{2\pi(n-i)}{n} + i\sin\frac{2\pi(n-i)}{n},$$

$i \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$

Dacă $i = 0 \Rightarrow n - i = n \Rightarrow \varepsilon_0^{-1} = \varepsilon_0 \in G$

Dacă $i \neq 0 \Rightarrow n - i \leq n - 1 \Rightarrow h = n - i \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$

$\Rightarrow \varepsilon^{-1} = \cos\frac{2\pi h}{n} + i\sin\frac{2\pi h}{n} \in G$

4) Fie ecuaţia $az^2 + bz^2 + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$ şi $\arg a + \arg c = 2 \arg b$ şi $|a| + |c| = |b|$. Să se arate că ecuaţia dată are cel puţin o rădăcină de modul unitar.

Soluţie:

$$\begin{cases} a = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1) \\ b = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \\ c = r_3(\cos t_3 + i \sin t_3) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \arg a + \arg c = 2 \arg b \Rightarrow t_1 + t_3 = 2t_2 \\ \text{şi } |a| + |c| = |b| \Rightarrow r_1 + r_3 = r_2 \end{array}$$

$$az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm \sqrt{r_2{}^2(\cos 2t_2 + i \sin 2t_2) - 4r_1 r_3(\cos(t_1 + t_3) + i \sin(t_1 + t_3))}}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)} =$$

$$= \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm \sqrt{(\cos 2t_2 + i \sin 2t_2)(r_2{}^2 - 4r_1 r_3))}}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)}$$

dar $r_1 + r_3 = r_2 \Rightarrow r_2{}^2 = r_1{}^2 + r_1{}^2 + r_3{}^2 + 2r_1 r_3 \Rightarrow r_2{}^2 - 4r_1 r_3 = r_1{}^2 + r_1{}^2 + r_3{}^2 + 2r_1 r_3 - 4r_1 r_3 =$ $= (r_1 - r_3)^2$

Deci:

$$z_{1,2} = \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm (\cos t_2 + i \sin t_2)(r_1 - r_3)}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)}$$

Observăm in:

$$z_2 = \frac{(\cos t_2 + i \sin y_2)(-2r_1)}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)} = -[\cos(t_2 - t_1) + i \sin(t_2 - t_1)] = \cos[\pi + (t_2 - t_1)] +$$

$+ i \sin[\pi + t_2 - t_1]$ şi $|t_2| = 1$.

5) Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe nenule, a.î. $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

a) Să se demonstreze că $(\exists)$ numere complexe α şi β a.î. $z_2 = \alpha z_1$, $z_3 = \beta z_2$ şi $|\alpha| = |\beta| = 1$

b) Să se rezolve ecuaţia $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta - \alpha - \beta + 1 = 0$ în raport cu una dintre necunoscute.

c) Folosind eventual rezultatele de la a) şi b) să se demonstreze că dacă $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 =$ $= z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$, atunci avem $z_1 = z_2 = z_3$ sau numerele z_1, z_2 şi z_3 sunt afixele vîrfurilor unui $\triangle$ echilateral.

Soluţie:

a) Fie

$$\begin{cases} z_1 = r(\cos t_1 + i\sin t_1) \\ z_2 = r(\cos t_2 + i\sin t_2), \qquad\qquad r \neq 0 \\ z_3 = r(\cos t_3 + i\sin t_3) \end{cases}$$

Fie $\alpha = r_4(\cos t_4 + i\sin t_4)$

$\beta = r_5(\cos t_5 + i\sin t_5)$

$z_2 = \alpha z_1 \Rightarrow r(\cos t_2 + i\sin t_2) = r \cdot r_4[\cos(t_1 + t_4) + i\sin(t_1 + t_4)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = r \cdot r_4 \\ t_4 + t_1 = t_2 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_4 = 1 \\ t_4 = t_2 - t_1 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ t_4 = t_2 - t_1 + 2k\pi \end{cases}$$

Deci α este determinat.

$z_3 = \beta z_1 \Rightarrow r(\cos t_3 + i\sin t_3) = r \cdot r_3[\cos(t_1 + t_5) + i\sin(t_1 + t_5)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = r \cdot r_5 \\ t_1 + t_5 = t_3 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_5 = 1 \\ t_5 = t_3 - t_1 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\beta| = 1 \\ t_5 = t_3 - t_1 + 2k\pi \end{cases}$$

Deci β este determinat.

Dacă se lucrează cu argumente reduste atunci $t_4 = t_2 - t_1$ sau $t_4 = t_2 - t_1 + 2\pi$, la fel t_5.

b) $\alpha^2 + \alpha(-\beta - 1) + \beta^2 - \beta + 1 = 0$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\beta+1 \pm \sqrt{\beta^2+2\beta+1-4\beta^2+4\beta-4}}{2} = \frac{\beta+1 \pm \sqrt{-3\beta^2+6\beta-3}}{2} = \frac{\beta+1+i(\beta-1)\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta + i(\beta-1)\sqrt{3}}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{\beta - i(\beta-1)\sqrt{3}}{2}$$

c) $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$

Comform a) $(\exists)$ numerele complexe de modul 1, α şi β a.î. $z_2 = \alpha z_1$ şi $z_3 = \beta z_1$

Înlocuind în relaţia dată obţinem:

$$\left.\begin{matrix} z_1{}^2 + \alpha^2 z_1{}^2 + \beta^2 z_1{}^2 = \alpha z_1{}^2 + \alpha\beta z_1{}^2 + \beta z_1{}^2 = \\ z_1 \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta - \alpha \cdot \beta = 0$$

$\Rightarrow \alpha = 1$şi $\beta = 1$ verifică această egalitate, deci în acest caz $z_2 = z_3 = z_1$

Comform pct. b) $\alpha_1 = \dfrac{\beta + i(\beta-1)\sqrt{3}}{2}$, unde $\beta = x + iy$ cu $|\beta| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow$

$x^2+y^2=1 \qquad (1)$

$$\left.\begin{array}{c}\alpha=\dfrac{x+iy+1+i(x+iy-1)\sqrt{3}}{2}=\dfrac{(x+1-y\sqrt{3})+i(y+x\sqrt{3}-\sqrt{3})}{2}\\ |\alpha|=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha|=\sqrt{\left(\frac{x+1-y\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{x+x\sqrt{3}-y\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2-x+1y\sqrt{3}=1}$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2+y^2-x-y\sqrt{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 1-x-y\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-y\sqrt{3}\\ y(2y-\sqrt{3})=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\\ \beta=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\alpha^2+1-\alpha-1-\alpha=0\Rightarrow\alpha=1$$

Soluţia observată iniţial ne conducela $z_1=z_2=z_3$

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ şi dă $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Înlocuind: $1+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}+\alpha^2-\alpha-\alpha\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha^2-\alpha(1+\sqrt{3}i)+2(1-\sqrt{3}i)=0$

$\alpha_{1,2}=\dfrac{(1+\sqrt{3})\pm3\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}}{4}=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)\pm3(1+\sqrt{3}i)}{4}$

$\alpha_1=\dfrac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}$, $|\alpha|=2$ nu indeplineşte condiţia $|\alpha|=1$

dar $\alpha_2=\dfrac{-2(1+\sqrt{3}i)}{4},=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ |\alpha|=1$

deci

$$\begin{cases}\alpha=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\\ \beta=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

Dacă $z_1=r(\cos t_1+i\sin t_1)$, atunci $t_2=\alpha t_1=r\cdot\left[\cos\left(t_1+\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(t_1+\dfrac{4\pi}{3}\right)\right]$ şi atunci $t_3=\beta z_2=r\cdot\left[\cos\left(t_1+\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(t_1+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Dacă $M_1(t_1), M_2(t_2), M_3(t_3)$ se află pe cercul de rază r şi argumentele fiind $t_1, t_1+\dfrac{2\pi}{3}$, $t_1+\dfrac{4\pi}{3}\Rightarrow$ ele sunt vîrfurile unui triunghi echilateral.

GEOMETRIE SPAŢIALĂ

1) Să se arate că dacă o dreaptă d nu este conţinută în planul α atunci $d \bigcap \alpha$ este $\oslash$ sau este formată dintr-un singur punct.

Soluţie:

Presupunem că $d \bigcap \alpha = \{A, B\} \Rightarrow d \subset \alpha$, contrazice ipoteza $\Rightarrow d \bigcap \alpha = \{A\}$ sau $d \bigcap \alpha = \oslash$.

2) Să se arate că $(\forall)\alpha$, $(\exists)$ cel puţin un punct nesituat în α.

Soluţie:

Presupunem că toate punctele al aparţine planului $a \Rightarrow (\nexists)$ pentru puncte nesituate în acelaş plan. Fals contrazice, $A.1.3$.

3) Există două drepte fără punct comun:

Soluţie:

Conform A.1.3 $(\exists)$ A, B, C, D nesituate în acelaţ plan. Presupunem că $AB \bigcap CD = \{O\} \Rightarrow$ AB şi CD sunt conţinute în acelaşi plan şi deci A, B, C, D sunt în acelaşi plan. Fals, contrazice ipoteza $\Rightarrow AB \bigcap CD = \oslash \Rightarrow (\exists)$ drepte fără punct comun.

4) Să se arate că fiind dată o dreaptă oarecare d $(\exists)$ cel puţin două plane care contin dreapta d.

Soluţie:

$(\exists) A \notin d$ (dacă toate punctele ar $\in d$ ar fi negată existenţă planului şi a spaţiului). Fie $\alpha = (dA), (\exists) B \notin \alpha$ (altfel n-ar exista spaţiul). Fie $\beta = (Bd), \alpha \neq \beta$ şi ambele conţin dreapta d.

5) Se consideră dreptele d, d', d'' a.î. luate două cîte două să se intersecteze. Să se arate că atunci cele 3 drepte au un punct comun sau sunt aşezate în acelaş plan.

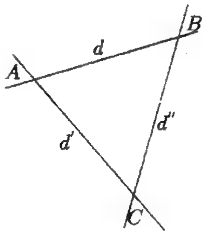
Soluţie:

Se arată că

$d \neq d' \neq d'' \neq d$.

Fie $d \bigcap d' = \{A\} \Rightarrow \alpha = (d, d') \Rightarrow \begin{cases} d \subset \alpha \\ d' \subset \alpha \end{cases}$

$$d \cap d' = \{B\} \quad B \neq A \Rightarrow \begin{cases} B \in d \\ d \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow B \in \alpha \text{ şi } B \in d''$$



$$\left.\begin{array}{l} d'' \cap d' = \{C\} \\ C \neq B \\ c \neq A \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} C \in d' \\ d' \subset \alpha \end{array} \Rightarrow C \in \alpha \text{ şi } C \in d'' \Rightarrow \begin{array}{c} d = d' \\ \text{sau} \\ d = d'' \end{array}$$

$\Rightarrow d'' \subset \alpha$ deci dreptele sunt aşezate îi acelaş plan α.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dacă } d \cap d' = \{A\} \Rightarrow A \in d' \\ d'' \cap d = \{A\} \Rightarrow A \in d'' \end{array}\right\} \Rightarrow d' \cap d'' = \{A\}$$

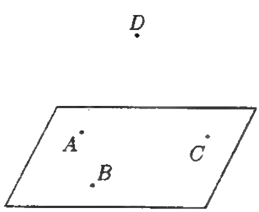
şi cele 3 drepte au un punct comun.

6) Fie A, B, C trei puncte necoliniare şi $\triangle$ un punct situat în planul (ABC). Să se arate:

a) Punctele D, A, B nu sunt coliniare şi nici $D, B, C; D, C, A$

b) intersecţia planelor $(DAB), (DBC), (DCA)$ este formată dintr-un singur punct.

Soluţie:



a) $D \notin (ABC)$

Presupunem că D, A, B coliniare $\Rightarrow (\exists)d$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a.î. } D \in d, A \in d \text{ şi } B \in d \\ A \in (ABC), B \in (ABC) \end{array}\right\} \xRightarrow{T_2} d \subset (ABC) \Rightarrow$$

$D \in (ABC)$ - fals

Deci punctele D, A, B nu sunt coliniare.

b) Fie $(DAB) \cap (BDC) \cap (DCA) = E$.

Cum planele sunt distincte, intersecţiile lor sunt:

$$\left.\begin{array}{l} (DAB) \cap (DBC) = DB \\ (DAB) \cap (DCA) = DA \\ (DBC) \cap (DCA) = DC \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Dacă } (DAB) = (DBC) \\ \Rightarrow A, B, C, D \text{ coplanare, contrar ipotezei.} \end{array}$$

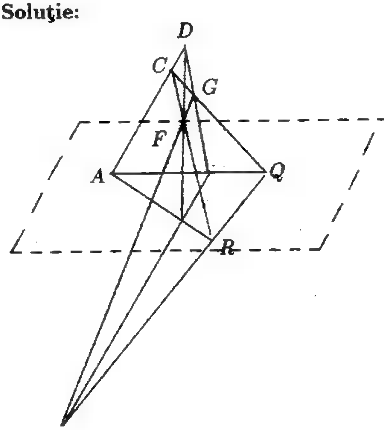
Presupunem că $(\exists) M \in E, M \neq D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} M \in DB \\ M \in DA \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B \in MD \\ A \in MD \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A, B, D$ sunt coliniare (fals contrar punctului a))

Deci mulţimea E are un singur punct $E = \{D\}$.

7) Folosind notaţiile ex. 6, se iau punctele E, F, G distincte de A, B, C, D, a.î. $E \in AD$, $F \in BD$, $G \in CD$. Fie $BC \cap FG = \{P\}$, $GE \cap CA = \{Q\}$, $EF \cap AB = \{R\}$. Să se arate că P, Q, R sunt coliniare (T. Desarques).

Soluţie:



Am arătat la 6 că dacă $D \notin (ABC)$, $(DAB) \neq (DBC)$

Arătăm că E, F, G nu sunt coliniare. Presupunem contrarul. Atunci

$$\left.\begin{array}{l} G \in EF \\ EF \subset (DAB) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} G \in (DAB) \\ G \in (DBC) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow (DAB) = (DBC)$

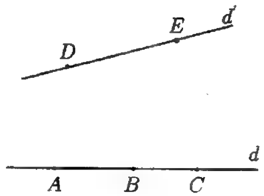
Avînd trei puncte comune D, B şi $G \Rightarrow$ fals. Deci E, F, G nu sunt coliniare şi determină un plan (EFG)

$$\left.\begin{array}{l} P \in BC \Rightarrow P \in (ABC) \\ P \in FG \Rightarrow P \in (EFG) \\ R \in AB \Rightarrow R \in (ABC) \\ R \in EF \Rightarrow R \in (EFG) \\ Q \in CA \Rightarrow P \in (ABC) \\ Q \in GE \Rightarrow P \in (EFG) \end{array}\right\} P, Q, R \in (ABC) \cap (EFG) \Rightarrow$$

$\Rightarrow P, Q, R$ sunt coliniare pentru că $\in$ dreptei de intersecţie a celor 2 plane.

8) Se consideră drepte d şi d' nesituate în acelaş plan şi punctele distincte $A, B, C \in d$ şi $D, E \in d'$, Cîte plane diferite putem duce a.î. fiecare să conţină 3 pct. necoliniare dintre punctele date? Genenerализare.

Soluţie:



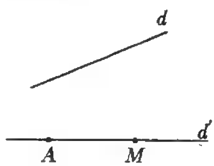
Planele sunt $(A, d'); (B, d'); (C, d')$.

Generalizare:

Numărul planelor corespunde cu numărul punctelor de pe dreapta d deoarece d' conţine doar 2 puncte.

9) Arătaţi că există o infinitate de plane care conţin o dreaptă dată d.

Soluţie:



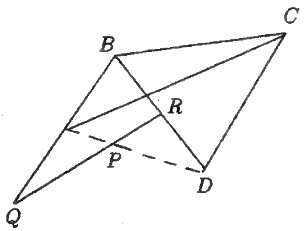
Fie dreapta d dată şi A un punct oarecare a.î. $A \notin d$. Obţinem planul $\alpha = (A, d)$ şi fie $M \notin \alpha$. Dreapta $d' = AM$, $d' \not\subset \alpha$ nu este conţinută deci în acelaş plan cu d. Planurile căutate sunt cele de forma (Md) , $M \in d'$, deci o infinitate de plane.

10) Se consideră punctele A, B, C, D, nesituate într-un plan.

a)Cîte dintre dreptele AB, AC, AD, BC, BD, CD pot fi intersectate de o dreptă care nu trece prin A, B, C, D?

b) dar de un plan ce nu trece prin A, B, C, D?

Soluţie:



$(\forall)$ 3 puncte determină un plan. Fie planul (ABD). În acest plan alegem $P \in |AD|$ şi $Q \in AB$ a.î. $A \in |BQ|$, atunci dreapta PQ separă punctele A şi D şi nu separă pe A şi B, deci separă pe P şi $D \Rightarrow PQ \cap |BD| = R$, unde $R \in |BD|$.

Dreapta PQ întîlneşte deci 3 dintre dreptele date. Să vedem dacă poate întîlni mai multe.

Presupunem că $PQ \cap BC = \{E\} \Rightarrow E \in PQ \subset (ABD) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} E \in (ABD) \\ E \in BC \end{array}\right\} \Rightarrow$

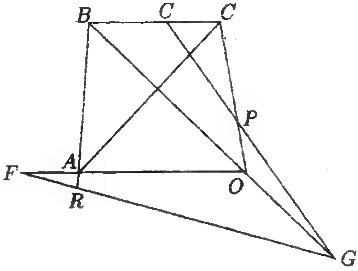
are două punctele comune cu planul.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B \in (ABD) \\ B \in BQ \end{array}\right. \Rightarrow BC \subset (ABD) \Rightarrow A, B, C, D \text{ coplanare - fals.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Deci } BC \cap (ABD) = \{E\} \\ BC \cap (ABD) = \{B\} \end{array}\right\} \Rightarrow E = B \Rightarrow B \in PQ, \text{ fals.}$$

La fel se arată că PQ nu taie AC sau DC, deci o dreaptă întîlneşte cel mult trei dintre dreptele date.

b)



Se consideră punctele E, F, G a.î. $E \in |BC|, A \in |DF|, D \in |BG|$. Aceste punctele determină planul (EFG) care taie evident dreptele BC, BD şi BD. FG nu separă pe A şi D şi nici pe BD $\Rightarrow$ nu separă nici pe A şi B $\Rightarrow$ $A \in |BR|$. Să arătăm că (EFG) întîlneşte şi dreptele AB, CD, AC. În planul (ABD) considerăm triunghiul FDG şi dreapta AB.

Cum această dreaptă taie latura $|FD|$ dar nu taie $|DG|$, trebuie să taie latura $|FG|$ deci $AB \cap |FG| = \{R\} \Rightarrow R \in |FG| \subset (EFG)$ deci $AB \cap (EFG) = \{R\}$. În planul (BCD) dreapta EG taie $|BC|$ şi nu taie $|BD|$, deci EG taie latura $|CD|$, $EG \cap |CD| = \{P\} \Rightarrow P \in EG \subset (EFG) \Rightarrow CD \cap (EFG) = \{P\}$.

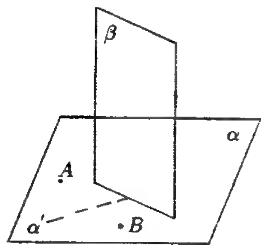
$$\left.\begin{array}{r} R \in (EFG),\ R \text{ nu separă } A \text{şi } B \\ E \text{ separă } B \text{şi } C \end{array}\right\} \Rightarrow R \in \cap |AC| = Q$$

$\Rightarrow Q \in RE \Rightarrow Q \in (EFG) \Rightarrow (EFG) \cap AC = \{Q\}$.

11) Se dau punctele α şi β, $A, B \in \alpha$. Să se construiască un punct $M \in \alpha$ egal depărtat de A şi B, care să $\in$ şi planului. β.

Soluţie:

Presupunem problema rezolvată: $\left.\begin{array}{r} \text{Dacă } M \in \alpha \\ M \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$



Cum $\|MA\| = \|MB\| \Rightarrow M \in$ mediatoarei seg. $[AB]$.
Deci pentru găsirea lui M se procedează astfel:

1) Se caută dreapta de intersecţie a planelor α şi β, d. Dacă $\alpha \parallel \beta$ problema nu are soluţii.
2) În planul α se construieşte mediatoarea d' a segmentului$[AB]$.
3) Se caută punctul de intersecţie al dreptelor d şi d'. Dacă $d \parallel d'$ problema nu are soluţii.

12) Să se determine intersecţia a trei plane distincte α, β, γ.

Soluţie:

Dacă $\alpha \bigcap \beta = \oslash \Rightarrow \alpha \bigcap \beta \bigcap \gamma = \oslash$. Dacă $\alpha \bigcap \beta = d$, intersecţia căutată este $d \bigcap \gamma$, care poate fi un punct (cele 3 plane sunt concurente), mulţimea vidă (dreapta de intersecţie a două plane este $\parallel$ cu al treilea) sau dreapta d (cele 3 plane trec prin d, sunt secante).

13) Se dau: planul α, dreptele d_1, d_2 şi punctele $A, B \notin \alpha \bigcup d_1 \bigcup d_2$. Să se afle un punct $M \in \alpha$ a.î. dreptele MA, MB să intersrecteze respectiv pe d_1 şi d_2.

Soluţie:

Pentru determinarea lui M se procedează astfel:

1) Se construieşte planul (Ad_1) şi se caută dreapta de intersecţie cu α_1, d_1'. Dacă $d_1'(/\exists)$, $(\nexists)$ nici M.

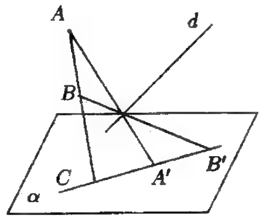
2) Se construieşte planul (Bd_2) şi se caută dreapta de intersecţie cu α, d_2'.
Dacă d_2' nu există, nu există nici M.

3) Se caută punctul de intersecţie al dreptelor d_1' şi d_2'. Problama are o singură soluţie, dacă dreptele sunt concurente, o infinitate, dacă coincid, şi nici una, dacă sunt paralele.

14) Se dau planul α, drepta $d \notin \alpha$, punctele $A, B \notin \alpha \bigcup d$ şi $C \in \alpha$. Fie $M \in d$ şi A', B' punctele de intersecţie ale dreptelor MA, MB cu planul α (dacă ele există).

Să se determine punctul M a.î. punctele C, A', B' să fie coliniare.

Soluţie:



Presupunem problema rezolvată.

a) Presupunem întîi că A, B, C sănt coliniare. Cum AA' şi BB' sănt drepte concurente, ele determină un plan β care intersectează pe α după dreapta $A'B'$.

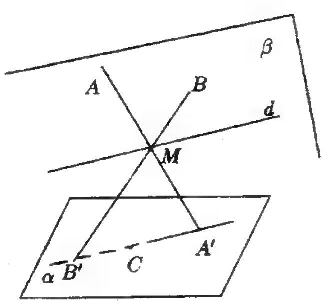
$$\left.\begin{aligned} \text{Cum } C \in AB \Rightarrow C \in \beta. \\ \text{dar } C \in \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow C \in \alpha \bigcup \beta \Rightarrow C \in A'B'$$

şi punctele C, A, B' sunt coliniare $(\forall) M \in d$.

b) Presupunem că A, B, C nu sunt coliniare.

Observăm că: $(AA', BB') = \beta$ (plan determinat de 2 drepte concurente).

$\beta \bigcup \alpha = d'$ şi $C \in d'$



Pentru determinarea lui M procedăm astfel:

1) Determinăm planul (ABC)

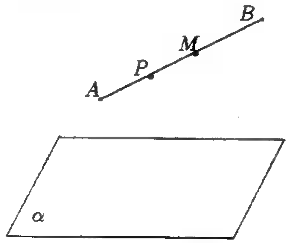
2) Căutăm unpctul de intersecţie al acestui plan cu dreapta d, deci $d \bigcap (ABC) = \{M\}$ este punctul dorit.

Atunci $(ABC) \bigcap \alpha = d'$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} AM \bigcap \alpha = \{A'\} \\ BM \bigcap \beta = \{B'\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A'B \in d' \\ &\left.\begin{aligned} C \in \{A'\} \\ C \in \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad C \in d' \end{aligned}\right\} \Rightarrow A', B', C' \text{ sunt coliniare.}$$

15) Dacă punctele A şi B unui semispaţiu deschis σ, atunci $[AB] \subset \sigma$. Proprietatea este aderentă şi dentru un semispaţiu închis.

Soluţie:



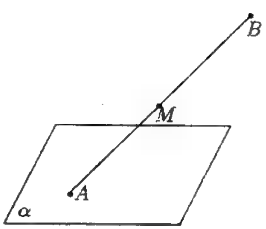
$A \in \sigma$ şi $B \in \sigma \Rightarrow [AB]\bigcap\alpha \neq \oslash$.

Fie $\sigma = |\alpha A = |\alpha B$.

Fie $M \in |AB|$ şi trebuie arătat că $M \in \sigma (\forall) M$ în interiorul segmentului.

Presupunem contrariul că $M \notin \sigma \Rightarrow (\exists) P$ a.î. $[AM]\bigcap d = \{P\} \Rightarrow P \in [AM] \Rightarrow P \in [AB] \Rightarrow [AB]\bigcap\alpha \neq \oslash$ fals.

$P \in \alpha$, deci $M \in \sigma$. Proprietatea se păstrează şi în cazul semispaţiului închis. Faţă de cazul anterior mai poate apărea cazul în care unul din punctele A şi $B \in \alpha$, sau cînd amîndouă aparţin lui α.



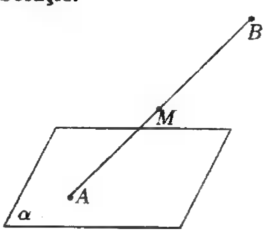
Dacă $A \in \alpha, B \in \sigma, |AB|\bigcap\alpha \neq \oslash$ şi se arată ca mai sus că:

$$\left.\begin{array}{l} |AB| \subset \sigma \\ A \in \alpha \\ B \in \sigma \end{array}\right\} \Rightarrow [AB] \subset \sigma\bigcup\alpha$$

Dacă $A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha \Rightarrow [AB] \subset \alpha \Rightarrow [AB] \subset \alpha\bigcup\sigma$.

16) Dacă punctul A nu este situat în planul α şi $B \in \alpha$ atunci $|BA \subset |\alpha A$.

Soluţie:



Fie $M \in |BA \Rightarrow B \notin [MA] \Rightarrow [MA]\bigcap\alpha = \oslash$

$\Rightarrow M \in |\alpha A$

Deci $|BA \subset |\alpha A$

17) Să se arate că intersecţia unei drepte d cu un semispaţiu este fie dreapta d, fie o semidreaptă, fie mulţimea vidă.

Soluţie:

Fie α un plan şi σ_1, σ_2 cele 2 semispaţii pe care le detertmină. Considerîm semispaţiul σ_1.

$d \bigcap \alpha = \emptyset$

1) $d \bigcap \sigma_1 = \emptyset$

2) $d \bigcap \sigma_1 \neq \emptyset$, fie $A \in d \bigcap \sigma_1 \Rightarrow \begin{cases} A \in \sigma_1 \\ A \in d \end{cases}$

Fie $\left.\begin{array}{r} M \in d \Rightarrow [AM] \subset d \\ d \bigcap \alpha = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} [AM] \bigcap \alpha = \emptyset \\ A \in \sigma_1 \end{array}\right\} \Rightarrow M \in \sigma_1, \ (\forall) M \in d \Rightarrow d \subset \sigma_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow d \bigcap \sigma_1 = d$

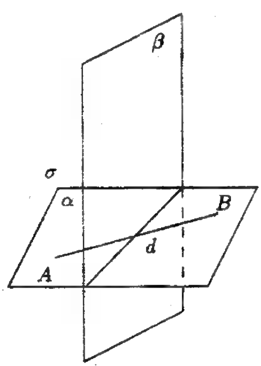
3) $d \bigcap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow d \bigcap \alpha = \{P\} \Rightarrow P$ determina pe d două semidrepte, $|PA$ şi $|PB$ unde

$\left.\begin{array}{l} P \in |AB| \\ P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow |AB| \bigcap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow A$ şi B sunt în semispaţii diferite.

Presupunem $\left.\begin{array}{l} A \in \sigma_1 \\ P \in \alpha \end{array}\right\} \stackrel{pr.2}{\Longrightarrow} |PA \subset |\alpha A \Rightarrow |PA \subset \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 \bigcap d = |PA$.

18) Arătaţi că dacă un plan α şi frontiera unui semispaţiu σ sunt plane secante, atunci intersecţia $\sigma \bigcap \alpha$ este un semiplan.

Soluţie:



Fie σ un semispaţiu deschis şi p frontiera sa şi fie $d = \alpha \bigcap \beta$.

Alegem punctele A şi $B \in \alpha - d$, de o parte şi de alta a dreptei $d \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow [AB] \bigcap \beta \neq \emptyset \\ d \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow [AB] \bigcap \beta \neq \emptyset$

$\Rightarrow A, B$ sunt de o parte şi de alta a lui β, adică numai una din ele se află în σ.

Presupunem $A \in \sigma \Rightarrow B \in \sigma$. Demonstrăm acum $\alpha \bigcap \sigma = |dA$

1) $\alpha \bigcap \sigma \subset |dA$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie } M\in\alpha\bigcap\sigma\Rightarrow M\in\alpha, M\in\sigma\\ A\in\sigma, B\neq\sigma\end{array}\right\}\Rightarrow [MB]\bigcap B\neq\oslash\quad \left.\begin{array}{r}M\in\alpha\\ B\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$[MB]\bigcap d\neq\oslash\Rightarrow M$ şi B sunt de o parte şi de alta a dreptei $d\Rightarrow M$ este de aceiaş parte a dreptei d cu $A\Rightarrow M\in|dA$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow M\in|dA\Rightarrow[MA]\bigcap d=\oslash\\ \alpha\bigcap\beta=d\\ [MA]\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow[MA]\bigcap B=\oslash\Rightarrow M\in|\beta A\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{r}M\in\sigma\\ M\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow M\in\alpha\bigcap\sigma$ deci $|dA\subset\alpha\bigcap\sigma$.

19) Intersecţia unui plan α cu un semispaţiu este fie planul α, fie un semiplan, fie mulţimea vidă.

Soluţie:

Fie σ semispaţiul considerat şi β frontiera sa. Sînt posibile mai multe cazuri:

1) $\alpha\bigcap\beta=\oslash$, în acest caz se poate ca:

a) $a\bigcap\sigma=\oslash$

b) $\alpha\subset\sigma\neq\oslash\Rightarrow(\exists)A\in\alpha\bigcap\sigma\Rightarrow\begin{array}{l}A\in\alpha\\ A\in\sigma\end{array}$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie } M\in\alpha\Rightarrow[MA]\subset\alpha\\ a\bigcap\beta=\oslash\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\begin{array}{c}[MA]\cap\beta=\oslash\\ A\in\sigma\end{array}\quad\Rightarrow M\in\sigma,(\forall)M\in\alpha\Rightarrow\alpha\subset\sigma\Rightarrow\alpha\bigcap\sigma=\alpha$$

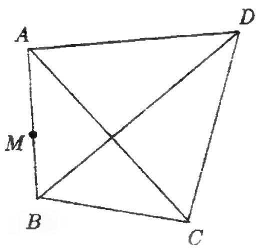
2) $a\bigcap\beta\neq\oslash\Rightarrow\alpha\bigcap\beta=d\Rightarrow\alpha\bigcap\sigma$ este un semiplan comform problemei anterioare 4.

20) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare ăi α un plan care nu trece prin unui din punctele date, dar trece printr-un punct al dreptei $|AB|$. Dintre segmentele $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$, $|BC|$, $|BD|$, $|CD|$. Cîte pot fi intersectate de planul α?

Soluţie:

Intersecţia a două plane este o dreaptă, iar dreapta taie doar două laturi ale unui triunghiuri:

Sînt posibile mai multe cazuri:



1) d taie $|\underline{AB}|$ şi $|\underline{BC}|$

d' taie $|AB|$ şi $|\underline{AD}|, \alpha$ taie pe $|AD|$ are deci un punct cu (ADC) şi fie $(ADC) \bigcap \alpha = d''$

d'' taie $|AD|$ şi nu taie $|AC| \Rightarrow d''$ taie $|\underline{DC}|$

α taie $|DC|$ şi $|BC| \Rightarrow$ nu taie $|BD|$. În acest caz α taie 4 din cele 6 sedmente (cele subliniate).

2) d taie $|\underline{AB}|$ şi $|\underline{AC}|$, nu taie $|BD|$

d' taie $|AB|$ şi $|AD|$, nu taie $|BD|$

d'' taie $|AD|$ şi $|AC|$, nu taie $|DC|$

$\Rightarrow$ α nu intersectează planul (BDC). În acest caz α intersectează numai 3 din cele 6 segmente.

3) d taie $|\underline{AB}|$ şi $|BC|$, nu taie $|AC|$

d' taie $|AB|$ şi $|BD|$, nu taie $|DC|$

α intersectează $|BD|$ şi $|BC|$, deci nu taie $|DC|$

În $\triangle BDC \Rightarrow \alpha$ nu intersectează planul (ADC)

În acest caz α intersectează numai trei segmente.

4) d taie $|\underline{AB}|$ şi $|\underline{AC}|$, nu taie $|BC|$

d' taie $|AB|$ şi $|\underline{BD}|$, nu taie $|AD|$

d'' taie $|AC|$ şi $|\underline{DC}|$

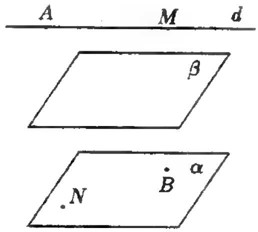
În triunghiul BDC α nu taie$|BC|$. Deci α intersectează 4 sau 3 segmente.

21) Fie d o dreaptă şi α, β două plane a.î. $d \bigcap \beta = \emptyset$ şi $\alpha \bigcap \beta = \emptyset$. Să se arate că dacă $A \in d$ şi $B \in \alpha$, atunci $d \subset |\beta A$ şi $\alpha \subset |\beta B$.

Soluţie:

$d \bigcap \beta = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Fie} M \in d \\ A \in d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} [AM] \subset d \\ d \bigcap \beta = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow = [AM] \bigcap \beta = \emptyset$$



$\Rightarrow M \in |\beta A, (\forall) M \in d \Rightarrow d \subset |\beta A$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie } N \in \alpha\\ B \in \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}[NB] \subset \alpha\\ \alpha \cap \beta = \emptyset\end{array}\right\} \Rightarrow = [NB] \cap \beta = \emptyset$$

$\alpha \subset |\beta B$.

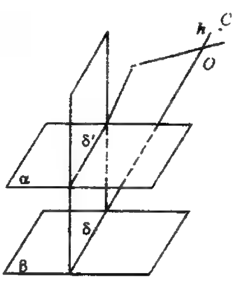
22) Fie $|\alpha A$ şi $|\beta B$ două semispaţii a.î. $\alpha \neq \beta$ şi $|\alpha A \subset |\beta B$ sau $|\alpha A \cap |\beta B = \emptyset$. Să se arate că $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

Soluţie:

1) Presupunem întîi că $\alpha \neq \beta$ şi $|\alpha A \subset |\beta B$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cum } A \in |\alpha A\\ |\alpha A \subset |\beta B\end{array}\right\} \Rightarrow A \in |\beta B \Rightarrow |\beta B = |\beta A$$

Atunci ipoteza se mai poate scrie $\alpha \neq \beta$ şi $|\alpha A \subset |\beta A$. Să arătăm că $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Prin reducere la absurd presupunem că $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) d = \alpha \cap \beta$ şi fie $O \in d$, deci $O \in \alpha$ şi $O \in \beta$. Ducem prin A şi O un plan r şi a.î. $d \in r$, deci cele trei plane α, β şi r să nu treacă prin această dreaptă. Întrucît r are punctul O comun şi cu α şi cu β, va intersecta aceste plane.



$$\left.\begin{array}{r}r \cap \alpha = \delta'\\ r \cap \beta = \delta\end{array}\right\} \Rightarrow \delta \cap \delta' = O \text{ care este un punct comun}$$

celor 3 plane. Dreptele δ şi δ' determină 4 unghiuri în planul r avînd O ca vîrf comun, $A \in$ int. unuia dintre ele, fie $A \in$ int. $\widehat{hk}$. Considerăm $C \in$ int. hk.

Atunci C este de aceiaşi parte cu A faţă de δ', deci C este de aceiaşi parte cu A faţă de $\alpha \Rightarrow C \in |\alpha A$.

Dar C este de partea opusă lui A faţă de δ, deci C este de partea opusă lui A faţă de $\beta \Rightarrow C \notin |\beta A$. Deci $|\alpha A \not\subset |\beta A$ - fals - contrazice ipoteza $\Rightarrow$ Deci $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

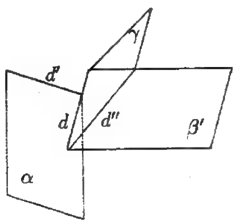
23) Să se arate că intersecţia unui unghi diedru cu un plan α poate fi: un unghi drept, reuniunea a două drepte, o dreaptă, mulţimea vidă sau un semiplan închis şi nu poate fi nici o

mulţime de alt tip.

Soluţie:

Fie d muchia unghiului diedru dat. Poziţia unei drepted faţă de un plan se pot distinge următoarele situaţii:

1) $d \cap \alpha = \{O\}$

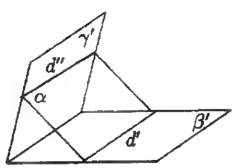


$d \cap \alpha = \{O\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in d \\ O \in \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in \gamma \\ O \in \beta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma' \cap \alpha = d' \\ \beta' \cap \alpha = d'' \end{cases}$$

Semidreapta cu originea în O, deci $\alpha \subset \widehat{\beta'\gamma'} = \widehat{d'd''}$ deci un unghi.

2) $d \cap \alpha = \emptyset$

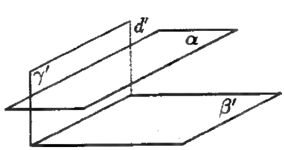


$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \alpha \cap \beta' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = d' \\ \quad \alpha \cap \gamma' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \gamma' = d'' \end{array}\right\} \Rightarrow d' \parallel d''$$

Într-adevăr, dacă am presupune că $d' \cap d'' \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) O \in \in d' \cap d''$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in d' \\ O \in d'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in \beta' \\ O \in \gamma' \\ O \in a \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O \in d \\ O \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow O \in d \cap \alpha, \text{ fals - contrazice ipoteza.}$$

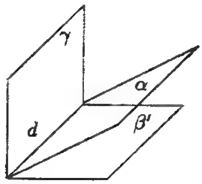
$$\text{b) } \begin{cases} \alpha \cap \beta' = d' \\ \alpha \cap \gamma' = \emptyset \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \alpha \cap \beta' = \emptyset \\ \alpha \cap \gamma' = d'' \end{cases} \Rightarrow \text{în acest caz } \alpha \cap \widehat{\beta'\gamma'} = d'' \text{ - o dreaptă.}$$



$$\text{c) } \left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta' = \emptyset \\ \alpha \cap \gamma' = \emptyset \end{array}\right\} \text{ atunci } \alpha \cap \widehat{\beta'\gamma'} = \emptyset$$

3) $d \cap \alpha = d$

a)



$d \cap \alpha = d$ dar $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma$

$a \cap \widehat{\beta'\gamma'} = d$ deci intersecţia este o dreaptă.

b) $\alpha = \beta$ sau $\alpha = \gamma$.

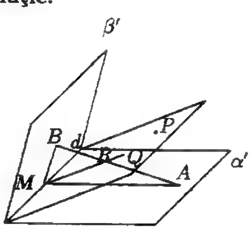
Atunci intersecţia este un semiplan închis.

24) Fie d muchia unui diedru propriu $\widehat{\alpha'\beta'}$, $A \in \alpha' - d$, $B \in \beta' - d$ şi $P \in$ int. $\widehat{\alpha'\beta'}$. Să se arate că:

1) $(Pd) \cap$ int.$\widehat{\alpha'\beta'} = |dP$.

2) Dacă $M \in d$, int.$\widehat{AMB}=$ int.$\alpha'\beta' \cap (ABM)$.

Soluţie:



1) int. $\widehat{\alpha'\beta'} = |\alpha B \cap |\beta A$

$P \in$ int.$\alpha'\beta' \Rightarrow P \in \alpha B$

$P \in |\beta A$

$a \cap (Pd) = d \overset{\text{pr.4}}{\Longrightarrow} (Pd) \cap (\alpha B)$ este semiplan $P \in |\alpha B$

$\Rightarrow (Pd) \cap |\alpha B = dP \qquad (*)$

$$\left.\begin{array}{r} (Pd) \cap \beta = d \Rightarrow (Pd) \cap |\beta A \text{ este semiplan} \\ P \in |\beta A \end{array}\right\} \Rightarrow (Pd) \cap |\beta A = |dP \quad (**)$$

Din (*) şi (**) $\Rightarrow (Pd) \cap |\alpha B \cap |\beta A = |dP \Rightarrow (Pd) \cap$ int. $\widehat{a'\beta'} = |dP$

2) $(ABM) \cap \alpha = AM$ deci sînt plane secante $\overset{\text{pr.4}}{\Longrightarrow} (AMB) \cap \beta A = |MB_1A$

$(AMB) \cap$ int. $\widehat{a'\beta'} = (AMB) \cap |\alpha B \cap |\beta A = [(AMB) \cap |\alpha B] \cap [(AMB) \cap |\beta A] =$
$= |MB_1A \cap |MA_1B =$ int.$\widehat{AMB}$.

25) Se consideră notaţiile din problema precedentă. Să se arate că:

1) punctele A şi B sînt de o parte şi de alta a planului (Pd);

2) segmentul $|AB|$ şi semiplanul $|dP$ au un punct comun.

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{r} M \in d \Rightarrow M \in dP \\ M \in (ABM) \end{array}\right\} \Rightarrow (AMB) \cap (dP) = d' \text{ şi } M \in d'$$

$$\left.\begin{array}{l} d' \subset (dP) \\ d' \cap d = M \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |dP \cap d' = |MQ \\ \text{unde } \; Q \in |dP \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |MQ \subset |dP \subset \text{ int.}\widehat{\alpha'\beta'} \\ |MQ \subset d' \subset (AMB) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

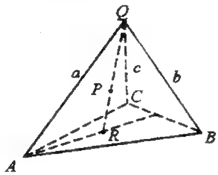
$$\Rightarrow |MQ \subset \text{int.}(\widehat{\alpha'\beta'}) \cap (ABM) \Rightarrow |MQ \subset \text{int. } \widehat{AMB} \Rightarrow \begin{array}{l} |MQ \subset |AB| = \{R\} \\ |MQ \subset |dP \end{array}$$

$\Rightarrow |dP \cap |AB| = \{R\}$ şi cum $|dP \subset (dP)$ avem $(dP) \cap |AB| = \{R\}$

$\Rightarrow$ punctele A şi B sînt de o parte şi de alta a lui (dP)

26) Dacă $\widehat{abc}$ este un unghi triedru, $P \in$ int. $\widehat{abc}$ şi A, B, C sînt puncte pe muchiile a, b, c diferite de O, atunci semidreapta $|OP$ şi int.ABC au un punct comun.

Soluţie:



Fie semidreptele $\alpha' = |OA_1B$, $\beta = |OA_1C$, $\gamma' = |OA_1P$. P fiind interior triedrului este interiorul diedrului format din oricare simiplane ce trece prin O ale triedrului, deci

$$\left.\begin{array}{r} P \in \text{ int } \widehat{\alpha'\beta'} \\ B \in \alpha' \\ C \in \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow |BC| \cap \gamma' = \{Q\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Deci } P \in |OA_1P \\ Q \in |OA_1P = \gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow P \text{ şi } Q \text{ se află în acelaş semiplan det. } OA \Rightarrow P \text{ şi } Q \text{ sînt de}$$

aceiaşi parte a lui OA (1).

$P \in \text{int } \widehat{abc} \Rightarrow P \in |OAC, A \Rightarrow P$ şi A sunt de aceiaş parte parte a lui $(OBC) \cap \gamma' \Rightarrow P$ şi A sînt de aceiaş parte a lui OQ (2).

Din (1) şi (2) $\Rightarrow P \in \text{int.}\widehat{AOQ} \overset{\text{T. transv.}}{\Longrightarrow} |AQ| \cap |OP = \{R\} \Rightarrow R \in |AQ|, \; |AQ| \subset \text{int.}ABC$

$\Rightarrow R \in \text{int}.ABC \Rightarrow |OP \cap \text{int}.ABC = \{R\}$.

27) Să se arate că orice intersecţie de mulţimi convexe este mulţme convexă.

Soluţie:

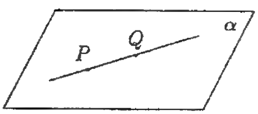
Fie M şi M' două mulţimi convexe şi $M \cap M'$ intersecţia lor. Fie

$$\Rightarrow PQ \in M \cap M', P \neq Q \Rightarrow \left.\begin{array}{r} P \in M \cap Q \in M \\ P \in M' \cap Q \in M' \end{array}\right\} \overset{M,M' convex}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} |PQ| \subset M \\ |PQ| \subset M' \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow |PQ| \subset M \cap M'$ deci intersecţia este conexă.

28) Să se arate că următoarele mulţimi sînt convexe planele, semiplanele, orice semispaţiu închis sau deschis şi interiorul unui unghi diedru.

Soluţie:



a) Fie $P, Q \in \alpha$; $P \neq Q \Rightarrow |PQ = PQ$ (dreapta este mulţime convexă).

$PQ \subset \alpha$, deci $|PQ| \subset \alpha$ deci planul este mulţime convexă.

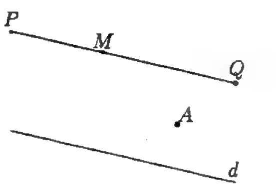
b) **Semiplanele:** Fie $S = |dA$ şi $P, Q \in S \Rightarrow |PQ| \cap d = \emptyset$. Fie $M \in |PQ| \Rightarrow |PM| \subset |PQ| \Rightarrow |PM| \cap d = \emptyset \Rightarrow P$ şi M sînt în acelaş semiplan $\Rightarrow M \in S$. Deci $|PQ| \subset S$ şi S este o mulţime convexă.

Fie $S' = [dA$. Sînt trei cazuri:

1) $P, Q \in |dA$ tratat anterior;

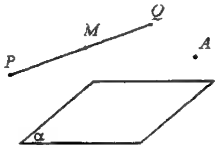
2) $P, Q \in d \Rightarrow |PQ| \subset d \subset S'$;

3) $P \in d, Q \notin d \Rightarrow |PQ| \subset |dQ \Rightarrow |PQ| \subset |dA \subset [dA$ deci $[dA$ este mulţime convexă.



c) **Semispaţiile:** Fie $\sigma = |\alpha A$ şi fie $P,\ Q \in \sigma \Rightarrow |PQ| \bigcap \alpha = \emptyset$.

Fie $M \in |PQ| \Rightarrow |PM| \subset |PQ| \Rightarrow |PM| \cap \alpha = \emptyset$



Fie $\sigma' = [\alpha A$. Sînt trei cazuri:

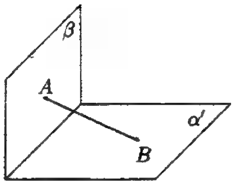
1) $P, Q \in |\alpha A$ tratat anterior;

2) $P, Q \in \alpha \Rightarrow |PQ| \subset \alpha \subset \sigma'$;

3) $P \in \alpha, Q \notin \alpha$

$P, Q \in \sigma' \Rightarrow [PQ] \subset \sigma' \Rightarrow |PQ \subset \sigma'|$ şi deci σ' este mulţime convexă.

d) interiorul unui unghi diedru:



int. $\widehat{\alpha'\beta'} = |\alpha A \bigcap |\beta B$ şi cum fiecare semispaţiu este mulţime convexă şi intersecţia lor este mulţimea convexă.

29) Poate fi un unghi diedru o mulţime convexă?

Soluţie:

Nu. Unghiul diedru nu este o mulţime convexă, întrucît dacă luăm ca în desenul anterior $A \in \beta'$ şi $B \in \alpha'$.

$(\forall) P \in \text{int.}\widehat{\alpha'\beta'}, |dP \bigcap |AB| \neq \emptyset$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow (\exists) M \in |AB| \text{ a.î} M \in \text{ int.}\widehat{\alpha'\beta'} \\ M \notin \alpha', M \notin \beta' \end{aligned}\right\} \Rightarrow |AB| \not\subset \widehat{\alpha'\beta'}.$$ Numai în cazul unghiului nul sau plat, cînd unghiul diedru se tramsformă în plan sau semiplan închis, este mulţime convexă.

30) Care din următoarele mulţimi sînt convexe:

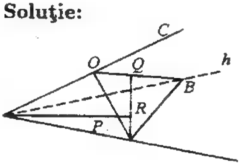
a) un unghi triedru;

b) interiorul său;

c) reuniunea feţelor sale;

d) reuniunea interiorului cu toate feţele sale?

Soluţie:



a) Nu. Unghiul triedru nu este mulţimea convexă, întrucît, dacă luăm $A \in a$ şi $Q \in$ int.$\widehat{bc}$ determinat de $P \in$ int.$\widehat{abc}$, $(\exists)R$ a.î. $|OP \cap$ int.$ABC = \{R\}, R \in |AQ|$, $R \notin \widehat{abc}$

Deci $A, Q \in \widehat{abc}$, dar $|AQ| \notin \widehat{abc}$

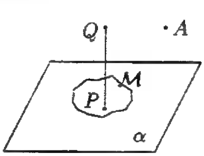
$\beta = (OCA)$, $\gamma = (OAB)$ este mulţime convexă ca intersecţie de mulţimi convexe.

c) Este aceiaş mulţime ca la a) şi nu este convexă.

d) Mulţimea respectivă este $[\alpha A \cap [\beta B \cap [\gamma C$, intersecţie de mulţimi convexe şi deci este convexă.

31) Fie σ un semispaţiu deschis limitat de planul α şi $\mathcal{M}$ o mulţime convexă închisă în planul α. Să se arate că mulţimea $\mathcal{M} \cap \sigma$ este convexă.

Soluţie:



Fie $\sigma = |\alpha A$ şi $\mathcal{M} \subset \alpha$. Fie $P, Q \in \mathcal{M} \cap \sigma$.

Apar cazurile:

a) $P, Q \in \sigma \Rightarrow |PQ| \subset \sigma \subset \sigma \subset \mathcal{M}$;

b) $P.Q \in \mathcal{M} \Rightarrow |PQ| \subset \mathcal{M} \subset \sigma \cap \mathcal{M}$;

c) $P \in \mathcal{M}, Q \in \sigma \overset{pr.1,pag.58}{\Longrightarrow} |PQ| \subset \sigma \subset \sigma \cap \mathcal{M}$.

32) Să se arate că intersecţia sferei $S(O,r)$ cu un plan ce trece prin O, este un cerc.

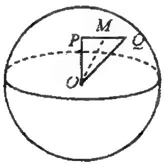
Soluţie:

$S(O,r) = \{M \in S / \|OM\| = r\}$.

$S(O,r) \cap \alpha = \{M \in S / M \in S(O,r) \cap M\alpha \cap \|OM\| = r\} = \{M \in \alpha / \|OM\| = r\} =$
$= C(O,r)$

33) Demostraţi că int.$S(O,r)$ este o mulţime convexă.

Soluţie:



Fie $P, Q \in$ int.$S(O,r) \Rightarrow \|OP\| \subset r, \|OQ\| \subset r$.

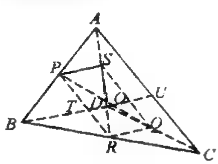
În planul (OPQ), fie $M \in (PQ)$

$$\left.\begin{array}{c} \Rightarrow \|OM\| < \|OP\| < r \\ \text{sau} \\ \|OM\| < \|OQ\| < r \end{array}\right\} \Rightarrow \|OM\| < r$$

$\Rightarrow M \in S(O,r)(\forall)M \subset |PQ| \Rightarrow |PQ| \subset S(O,r)$

34) Să se arate ca unind mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru se obţin drepte cuncurente.

Soluţie:



Fie: Pmijlocul lui$|AB|$

R mijlocul lui $|BC|$

Q mijlocul lui $|DC|$

S mijlocul lui $|AD|$

T mijlocul lui $|BD|$

U mijlocul lui $|AC|$

În triunghiul $ABC : |RP|$ l.m. $\|PR\| = \frac{\|AC\|}{2}; PR \parallel AC$.

În triunghiul $DAC : |SQ|$ l.m. $\|SQ\| = \frac{\|AC\|}{2}; SQ \parallel AC$.

$\Rightarrow \|PR\| = \|SQ\|, PR \parallel SQ \Rightarrow PRSQ$ paralelogram $\Rightarrow |PQ|$ şi $|SR|$ se intersectează în mijlocul lor O.

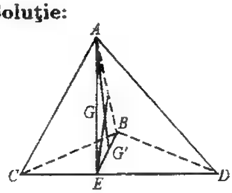
$$\left.\begin{array}{cc} \|ST\| = \frac{\|AB\|}{2}, & \|OR\| = \frac{\|AB\|}{2} \\ ST \parallel AB & UR \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \|ST\| = \|UR\| \\ ST \parallel UR \end{array}\right\} \Rightarrow STRU \text{ - paralelogram.}$$

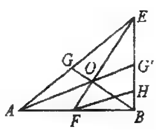
$\Rightarrow |TU|$ trece prin mijlocul O al lui $|SR|$.

Deci cele trei drepte PR, SR, TU sînt concurente în O.

35) Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale fețelor opuse sînt concurente în același punct ca cele trei drepte din exemplul precedent.

Soluție:





Fie tetraedrul $ABCD$ și E mijlocul lui $|CD|$. Centrul de greutate G al feței ACD se află pe $|AE|$ la o treime de bază. Centru de greutate G' al feței BCD se află pe $|BE|$ la o tremie de bază $|CD|$.

Desprindem separat $\triangle AEB$. Fie F mijlocul lui AB, deci EF este mediană în acest triunghi iar în problema precedentă a fost unul din cele 3 segmentele concurente într-un punct situat la mijlocul fiecăreia.

Fie O mijlocul lui $|EF|$. Notăm $AO \cap EB = \{G'\}$ și $BG \cap EA = \{G\}$.

$$|AF| \equiv |FB| \Rightarrow |FH| \text{ m. în } ABG' \Rightarrow |BH| \equiv |HG'| \qquad (1)$$

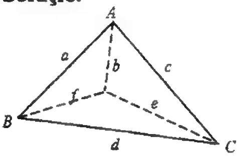
$$\text{Din} \quad \left. \begin{array}{c} OG' \parallel FH \\ |EO| \equiv |OF| \end{array} \right\} \Rightarrow |OG'| \text{ l.m. în } \triangle EFH \Rightarrow |EG'| \equiv G'H \qquad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow |EG'| \equiv |G'H| \equiv |HB| \Rightarrow \dfrac{\|EG\|}{\|EB\|} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G'$ este este tocmai centru de greutate al feței BCD, întrucît este situat pe mediana $|EB|$ la o treime de E. La fel se arată că G este tocmai centrul de greutate al feței ACD. S-a arătat deci că BG și AG' trec prin punctul O al problemei precedente.

Alegînd fețele ACD și ACB și notănd cu G'' centrul de greutate al feței ACB, se arată la fel că BG și DG'' trec prin mijlocul segmentului $|MN|$ ($|AM| \equiv |MC|, |BN| \equiv |ND|$) deci tot prin punctul O etc.

36) Fie $ABCD$ un tetraedru. Se consideră unghiurile triedre care au ca muchii $[AB$, $[AE$, $[AD$, $[BA$, $[BC$, $[BD$, $[CA$, $[CB$, $[CD$, $[DA$, $[DB$, $[DC$. Să se arate că intersecția interioarelor acestor 4 unghiuri triedre coincide cu interiorul tetraedrului $[ABCD]$.

Soluţie:



Notăm planele $(ABC) = \alpha$, $(ADC) = \beta$, $(BDC) = \gamma$, $(ABO) = \delta$.

Fie M intersecţia interioarelor celor 4 unghiuri treidre.

Arătăm că:

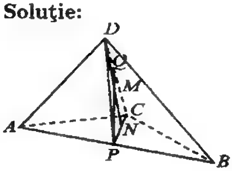
$M =$ int.$[ABCD]$, prin dublă incluziune

1) $P \in M \Rightarrow P \in$ int. $\widehat{abc} \cap$ int. $\widehat{afd} \cap$ int. $\widehat{dec} \cap$ int. $\widehat{bfc} \Rightarrow P \in |\alpha D \cap |\gamma C \cap \beta B$ şi $P \in |\delta A \cap |\gamma C \cap \beta B \Rightarrow P \in |\alpha D$ şi $P \in |\beta B$ şi $P \in |\gamma C$ şi $P \in |\delta C \Rightarrow P \in |\alpha D \cap \beta B \cap |\gamma C \cap \delta A \Rightarrow$ $P \in$ int. $[ABCD]$. Deci $M \in [ABCD]$.

2) Urmărind raţionamentul invers se arată că $[ABCD] \subset M$ de unde egalitatea.

37) Să se arate că $(\forall)M \in$ int.$[ABCD]$ $(\exists)$ $P \in |AB|$ şi $Q \in |CD|$ a.î. $M \in ||PQ$.

Soluţie:



$M \in$int.$[ABCD] \Rightarrow (\exists)N \in$int. ABC a. î.

$M \in |DN|$, $N \in$int.$ABC \Rightarrow (\exists)P \in |AB|$ a.î. $n \in |CP|$.

$(ADB) \cap (DPC) = DP$

Din $N \in |CP|$ şi $M \in |DN| \overset{lema}{\Longrightarrow}$ int. $DPC \Rightarrow$

$\Rightarrow M \in$ int.$DPC \Rightarrow (\exists)Q \in |DC|$ a.î. $|PQ|$.

Deci s-a arătat că $(\exists)P \in |AB|$ şi $Q \in |DC|$ a.î. $M \in |PQ|$.

38) Interiorul tetraedrului $[ABCD]$ coincide cu reuniune segmentelor $|PQ|$ cu $P \in |AB|$ şi $Q \in |CD|$, iar tetraedrul $[ABCD]$ este egal cu reuniunea segmentelor închise $[PQ]$, cînd $P \in [AB]$ şi $Q \in [CD]$.

Soluţie:

Fie $\mathcal{M}$ reuniunea segmantelor deschise $|PQ|$. Trebuie să arătăm că: int.$[ABCD] = \mathcal{M}$ prin dublă incluziune.

1) Fie $M \in$int.$[ABCD] \Rightarrow (\exists)P \in |AB$ şi $Q \in |CD|$ a.î. $M \in |PQ| \Rightarrow M \in \mathcal{M}$ şi deci int.$[ABCD] \subset \mathcal{M}$.

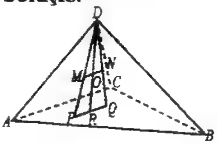
2) Fie $M \in \mathcal{M} \Rightarrow (\exists)P \in |AB|$ şi $Q \in |CD|$ a. î. $M \in |PQ|$. Punctele D, C şi P determină planul (PDC) şi $(PDC)\bigcap(ACB) = PC$, $(PUC) \cap (ADB) = PD$.

Întrucît $(\exists)Q \in |CD|$ a.î. $M \in |PQ| \Rightarrow M \in [PCD] \Rightarrow (\exists)R \in |PC|$ a.î. $M \in |DR|$. Dacă $P \in |AB|$ şi $R \in |PC| \Rightarrow R$ $\in$int.ACB a.î. $M \in |DR| \Rightarrow M$ $\in$int.$[ABCD] \Rightarrow$ $\mathcal{M}$ $\subset$int.$[ABCD]$.

Lucrînd cu segmantele închise se obţine că $(\exists)R \in [ACB]$ a.î. $M \in [DR]$ obţinîndu-se tetraedrul $[ABCD]$.

39) Tetraedrul este o mulţime convexă.

Soluţie:



Fie $M \in [ABCD] \Rightarrow (\exists)P \in [ABC]$ a.î. $M \in [DP]$.
Fie $N \in [ABCD] \Rightarrow (\exists)Q \in [ABC]$ a.î. $N \in [DQ]$.
Dreptele concurente DM şi DN determină unghiul DMN

Suprafaţa triunghiului DPQ este o mulţime convexă

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} M \in [DPQ] \\ N \in [DPQ] \end{array}\right\} \Rightarrow |MN| \subset [DPQ].$$

Fie $O \in |MN| \Rightarrow O \in [DPQ] \Rightarrow (\exists)R \in [PQ]$ a.î. $O \in [DR]$. Dar $[PQ] \subset [ABC]$ deoarece $P \in [ABC]\bigcap Q \in [ABC]$ şi suprafaţa triunghiului este convexă. Deci $(\exists)R \in [ABC]$ a.î. $O \in [DR] \Rightarrow O \in [ABCD], (\forall)O \in |MN| \Rightarrow |MN| \subset [ABCD]$ şi tetraedrul este o mulţime convexă.

Observaţie: Tetraedrul mai poate fi privit şi ca intersecţia a patru semispaţii închise care sînt mulţimi convexe.

40) Fie $\mathcal{M}_1$ şi $\mathcal{M}_2$ mulţimi convexe. Să se arate că reunind segmentele $[PQ]$, pentru care $P \in \mathcal{M}_1$ şi $Q \in \mathcal{M}_2$, se obţine o mulţime convexă.

Soluţie:

Fie $\mathcal{M}$ reuniunea segmentelor $[PQ]$ cu $P \in \mathcal{M}_1$ şi $Q \in \mathcal{M}_2$.
Fie $x, x' \in \mathcal{M} \Rightarrow (\exists)P \in \mathcal{M}_1$ şi $Q \in \mathcal{M}_2$ a.î. $x \in [PQ]$;

$(\exists)P' \in \mathcal{M}_1$ şi $Q \in \mathcal{M}$ a.î. $x' \in [P'Q']$.

Din $P, P' \in \mathcal{M}_1 \Rightarrow [PP'] \in \mathcal{M}_1$ care este mulţime convexă.

Din $Q, Q' \in \mathcal{M}_2 \Rightarrow [QQ'] \in \mathcal{M}_2$ care este mulţime convexă.

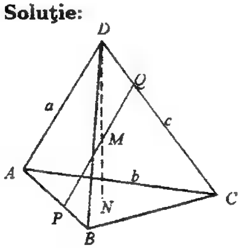
Reuniunea tuturor segmentelor $[MN]$ cu $M \in [PP']$ şi $N \in [QQ']$ este tetraedrul $[PP'QQ'] \subset$ $\subset \mathcal{M}$, întrucât $M \in \mathcal{M}_1$ şi $M \in \mathcal{M}_2$.

Dar tetraedrul $[PP'Q'Q]$ este o mulţime convexă, deci din $x, x' \in [PP'Q'Q] \Rightarrow |xx'| \subset$ $[PP'Q'Q] \in \mathcal{M}$.

Deci din $x, x' \in \mathcal{M} \Rightarrow |xx'| \subset \mathcal{M}$, deci mulţimea M este convexă.

41) Să se arate că interiorul unui tetraedru coincide cu intersecţia semispaţiilor deschise determinate de planele feţelor şi vîrful opus respectiv. Caracterizaţi tetraedrul ca o intersecţie de semispaţii.

Soluţie:



Interiorul tetraedrului coincide cu reuniunea segmentelor $|PQ|, P \in |AB|$ şi $Q \in |CD|$, adică

$$\text{int. } [ABCD] = \{|PQ| \setminus P \in |AB|, Q \in |CD|\}.$$

Să arătăm că:

$\text{int.}[ABCD] = |(ABC), D \cap |(ABD), C \cap |(ADC), B \cap$ $\cap |(DBC), A$.

1) Fie $M \in \text{int.}[ABCD] \Rightarrow P \in |AB|$ ş $Q \in |DC|$ a.î. $M \in |PQ|$.

$$\text{Din } P \in |AB| \Rightarrow B \notin |AP| \Rightarrow |AP| \cap (BDC) = \emptyset \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P \in |(BDC), A \\ P \in (BDC) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PQ| \subset |(BDC), A; M \in |PQ| \Rightarrow M \in |(BDC), A \qquad (1)$$

Din $P \in |AB| \Rightarrow A \notin |PB| \Rightarrow |PB| \cap (ADC) = \emptyset \Rightarrow P \in |(ADC),\ B;\ Q \in (ADC) \Rightarrow$ $\Rightarrow |PQ| \subset |(ADC), B \Rightarrow M \in |(ADC), B \qquad (2)$

$$Q \in |DC| \Rightarrow D \notin |QC| \Rightarrow |QC| \cap (ABD) = \emptyset \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q \in |(ABD), C \\ P \in (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |PQ| \subset |(ABD), C \Rightarrow M \in |(ABD), C$ (3)

$$Q \in |DC| \Rightarrow C \notin |DQ| \Rightarrow |DQ| \cap (ABC) = \emptyset \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q \in |(ABC), D \\ P \in (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |PQ| \subset |(ABC), D \Rightarrow M \in |(ABC), D$ (4)

Din (1),(2),(3),(4) $\Rightarrow M \in |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D$ deci: int.$[ABCD] \subset |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D$.

2) Fie $M \in |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D \Rightarrow M \in |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \Rightarrow M \in$ int. $\widehat{abc} \Rightarrow |DM| \cap$ int.$ABC = \{N\}$. Dacă presupunem $N \in |DM| \Rightarrow |DM| \cap (ABC) \neq \emptyset \Rightarrow M$ şi D sînt în semispaţii diferite faţă de $(ABC) \Rightarrow M \notin (ABC), D$, fals (contrazice ipoteza).

Deci $M \in |DN|, (\exists) N \in$ int.ABC a.î. $M \in |DN| \Rightarrow M \in$ int. $[ABCD]$ şi incluziunea a doua este dovedită.

În cazul tetraedrului: $[ABCD] = \{[PQ] \setminus P \in [AB]$ şi $Q \in [CD]\}$

Dacă $P = A, Q \in [CD], [PQ]$ descrie faţa $[ADC]$

$P = B, Q \in [CD], [PQ]$ descrie faţa $[BDC]$

$Q = C, P \in [AB], [PQ]$ descrie faţă $[ABC]$.

Întrucît suprafeţele triunghiulare sînt mulţimi convexe şi odată cu două puncte ale lor P, Q segmentul $[PQ]$ este inclus în suprafaţa respectivă.

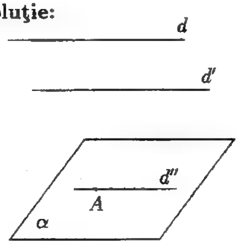
Deci la egalitatea din cazul anterior adăugînd şi aceste cazuri obţinem:

$[ABCD] = [(BCD), A \cap [(ACD), B \cap [(ABD), C \cap [(ABC), D$.

DREPTE ŞI PLANE

1)Fie d, d' două drepte parelele. Dacă dreapta d este paralelă cu un plan α, să se arate că $d' \parallel \alpha$ sau $d' \subset \alpha$.

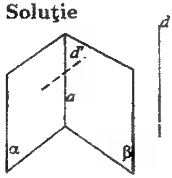
Soluţie:



$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r}\text{Fie } A\in\alpha\\ d\parallel\alpha\\ d''\parallel d\end{array}\right\}\Rightarrow d''\subset\alpha \\ \left.\begin{array}{r} d'\parallel d\\ d''\parallel d\end{array}\right\}\Rightarrow d'\parallel d''\end{array}\right\}\Rightarrow d''\parallel\alpha \text{ sau } d'\subset\alpha$$

2) Se consideră o dreaptă d, paralelă cu planele α şi β, care se intersectează după dreaptă a. Arătaţi că $d \parallel a$.

Soluţie

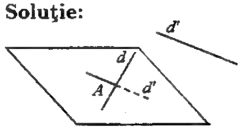


Fie $A \in a \Rightarrow A \in \alpha \bigcap A \in \beta$. Ducem prin A, $d' \parallel d$.

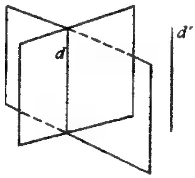
$$\left.\begin{array}{l} A\in\alpha,\ \left.\begin{array}{r} d\parallel\alpha\\ d'\parallel d\end{array}\right\}\Rightarrow d'\subset\alpha \\ A\in\beta,\ \left.\begin{array}{r} d\parallel\beta\\ d'\parallel d\end{array}\right\}\Rightarrow d'\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} d'\subset\alpha\subset\beta\\ \alpha\bigcap\beta=a\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} d'=a\\ d'\parallel d\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel d$$

3) Printr-o dreaptă dată d duceţi un plan paralel cu o altă dreaptă dată d'. Discutaţi numărul soluţiilor.

Soluţie:



a) Dacă $d \nparallel d'$ soluţia este unică şi se obţine asfel: Fie $A \in d$. În planul (A, d'') ducem $d'' \parallel d'$. Dreptele concurente d şi d'' determină planul a. Cum $d' \parallel d'' \Rightarrow d \parallel \alpha$, în cazul dreptelor necoplanare.

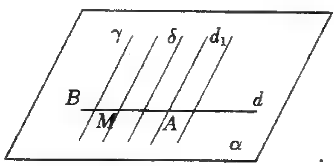


b) dacă $d \parallel d'$, $(\exists)$ o infinitate de soluţii. Orice plan care trece prin d este paralelă cu d', cu ecxepţia planului (d, d').

c) $d \nparallel d'$, dar sînt coplanare ($\nexists$) soluţii.

4) Să se determine reuniunea dreptelor care intersectează o dreaptă dată d şi sînt paralele cu o altă dreaptă dată $d'(d \nparallel d')$.

Soluţie:



Fie $A \in d$, ducem prin A, $d_1 \parallel d'$.

Notăm $\alpha = (d, d_1)$. Cum $d' \parallel d_1 \Rightarrow d' \parallel \alpha$.

Fie $M \in d$, arbitrar $\Rightarrow M \in \alpha$.

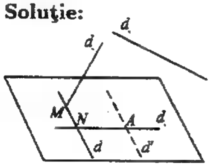
$$\left.\begin{array}{r} \text{Ducem } \delta \parallel \delta',\ M \in \delta \\ d' \parallel \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \delta \subset \alpha \text{ deci toate para-}$$

lelele la d' şi care intersectează d sînt conţinute în planul α.

Fie $\gamma \subset \alpha$, $\gamma \parallel d' \Rightarrow \gamma \cap d = B$, deci $(\forall)$ paralelă la d' din α intersectează pe d. Deci planul α reprezintă reuniunea cerută.

5) Să se construiască o dreaptă care întîlneşte două drepte date şi este paralelă cu o a treia dreaptă dată. Discuţie.

Soluţie:



$$\left.\begin{array}{r} \text{Prin M ducem } d \text{ a.î. } d \parallel d' \\ d' \parallel d_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d \parallel d_3$. Conform problemei 4: $d \cap d_1 = \{N\}$.

Deci $d \cap d_2 = \{M\}$

$d \cap d_1 = \{N\}$

$d \parallel d_3$

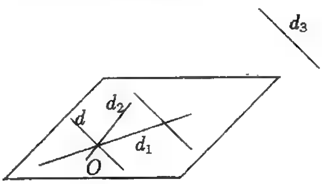
a) Dacă $d_3 \nparallel d_1$, pl. α este unic şi dacă $d_2 \cap \alpha \neq \emptyset$, soluţia este unică.

b) Dacă $d_1 \parallel d_3$, nu $(\exists)$ $\begin{array}{l} d \parallel d_1 \\ d \bigcap d_1 \neq \emptyset \end{array}$ căci ar însemna că printr-un punct putem duce două paralele d, d_1 la aceiaş dreapta d_3.

Deci nu există soluţie.

c) Dacă $d_1 \nparallel d_3$ şi $d_2 \bigcap \alpha = \emptyset$ toate paralele la d_2 care taie pe d_1 sînt în planul α şi nici una nu poate intersecta pe d_2, deci problema nu are soluţii.

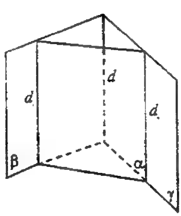
d) Dacă $d_2 \subset \alpha, d_1 \bigcap d_2 \neq \emptyset$, fie $d_1 \bigcap d_2 = \{O\}$ şi dreapta căutată este paralelă la d_3 dusă prin $O \Rightarrow$ o soluţie.



e) dacă $d_2 \subset \alpha, d_2 \parallel d_1$. Problema are o infinitate de soluţii, $(\forall) \parallel$ la d_3 care taie pe d_1, taie şi pe d_2.

6) dacă un plan α intersectează planele secante după drepte paralele, atunci α este paralel cu dreapta $\beta \bigcap \gamma$.

Soluţie:



Fie: $\beta \bigcap \gamma = d$

$\alpha \bigcap \beta = d_1$

$\alpha \bigcap \gamma = d_2$

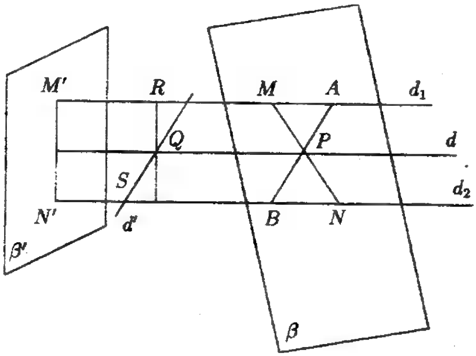
$d_1 \parallel d_2$

$$\left.\begin{array}{c} d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_1 \parallel \gamma \\ d_1 \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \bigcap \gamma = d$$

$$\left.\begin{array}{l} d = d_1 \\ d_1 \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel \alpha$$

7) Un plan variabil taie două drepte paralele în punctele M şi N. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$.

Soluţie:

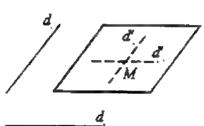


$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (\exists)\alpha = (d_1, d_2)$

Problema se reduce la locul geometric al mijloacelor segmentelor care au extremităţi pe două drepte paralele P un astfel de punct $|MP| = |PN|$. Ducem $AB \perp d_1 \Rightarrow AB? \widehat{MPA} = \widehat{BPN} \Rightarrow \triangle MAP = \triangle NBP \Rightarrow |PA| \equiv |PB| \Rightarrow \|AP\|? \Rightarrow$ Locul geometric este paralela la d_1 şi d_2 dusă pe mijlocul distanţei dintre ele. Se arată şi reciproc.

8) Se dau două drepte. Duceţi printr-un punct dat un plan paralel cu ambele drepte. Discuţie.

Soluţie:



$M \notin d_1, M \notin d_2.$

Fie $d_1 \nparallel d_2$. În planul (d, M) ducem $d_1' \parallel d_1, M \in d_1'$. În planul $(d_2 M)$ ducem $d_2' \parallel$ $\parallel d_2, M \in d_2'$. Notăm $\alpha = (d_1', d_2')$ planul determinat de două drepte concurente.

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \parallel d_1' \Rightarrow d_1 \parallel \alpha \\ d_1 \parallel d_2' \Rightarrow d_2 \parallel \alpha \end{array}\right., M \in \alpha \text{ soluţie unică.}$$

Fie $d_1 \parallel d_2, N \notin d_1, M \notin d_2$.

$d_1 = d_1' = d_2'$

În acest caz $d_1' = d_2' = d$ şi prin d trec o infinitate de plane $\left.\begin{array}{l} d_2 \parallel d \\ d_1 \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow d_1$ şi d_2 sînt paralele cu $(\forall)$ din planele ce trec prin d.

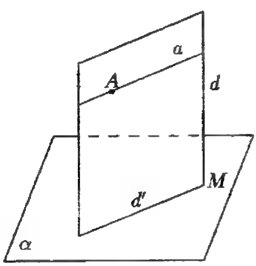
Problema are o infinitate de soluţii. Dar $M \in d_1$ sau $M \in d_2$, problema nu are soluţii fiindcă planul nu poate trece printr-un punct al unei drepte şi să fie paralel cu ea.

9) Să se construiască o dreaptă care trece printr-un punct dat, este paralelă cu un plan dat şi intersectează o dreaptă dată. Discuţie.

Soluţie:

Fie A punctul dat, α planul dat şi d dreapta dată.

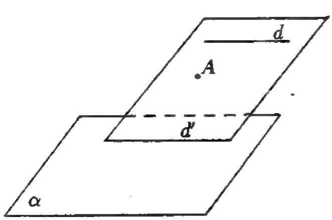
a) Presupunem că $d \nparallel \alpha, d \cap \alpha = \{M\}$. Fie planul (dA) care are un punct comun M cu $\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow (dA) \cap \alpha = d'$.



Ducem în planul (dA) prin punctul A o paralelă a la d'.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a \parallel d' \\ d' \cap d = \{M\} \end{array}\right\} \Rightarrow a \cap d \neq \emptyset \\ \left.\begin{array}{l} a \parallel d \\ d' \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha, A \in a \end{array}\right\} a \text{ este dreapta căutată.}$$

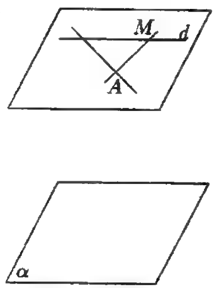
b) $d \parallel \alpha, (dA) \cap \alpha \neq \emptyset$



$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } (dA) \cap \alpha = \alpha' \\ d \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow d' \parallel d$

Toate dreptele care trec prin A şi intersectează d sînt conţinute în planul (dA). Dar toate aceste drepte taie şi pe $d' \parallel d$, deci nu pot fi paralele cu α. Nu există soluţie.

c) $d \parallel \alpha$, $(dA) \cap \alpha = \emptyset$.



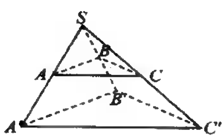
$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie } M \in d \text{ şi dreapta } AM \subset (dA) \\ (dA) \bigcap \alpha = \emptyset\end{array}\right\} \Rightarrow AM \bigcap \alpha = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM \parallel \alpha, (\forall) M \in d.$$

Problema are o infinitate de soluţii.

10) Să se arate că dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ situate în plane diferite, au $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ şi $BC \parallel B'C'$, atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele.

Soluţie:



(ABC) şi $(A'B'C')$ sînt plane distincte deci cele şase puncte A, B, C, A', B', C' nu pot fi coplanare.

$AB \parallel A'B' \Rightarrow A, B, A', B'$ sînt coplanare.

Sînt coplanare cîte 4 puncte şi anume $(ABB'A'), (ACC'A'), (BCC'B')$ determinînd 4 plane distincte. Dacă am presupune că planele coincid două cîte două, ar rezulta alte 6 puncte coplanare ceea ce este fals.

În planul $ABB'A'$, dreptele AA', BB'pot fi paralele sau concurente.

Presupunem întîi că:

$AA' \bigcap BB' = \{S\} \Rightarrow S \in AA' \bigcap S \in BB'$

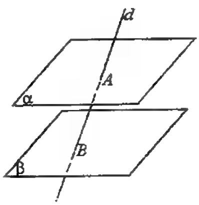
$$\left.\begin{array}{l} S \in AA' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S \in (ABB'A') \\ S \in (ACC'A') \end{array}\right. \\ S \in BB' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S \in (BCC'B') \\ S \in (ABB'A') \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{este punct comun celor 3 plane distincte dar, intersecţia}$$

a 3 plane distincte nu poate fi decît un punct, o dreaptă sau $\emptyset$. O dreaptă nu poate fi, întrucît dreptele

$$\left.\begin{array}{l}(ABB'A')\bigcap(ACC'A') = AA' \\ (ABB'A')\bigcap(BCC'B') = BB' \\ (ACC'A')\bigcap(BCC'B') = CC'\end{array}\right\} \Rightarrow$$ sînt distincte dacă am presupune că două din ele coincid,

cele 6 puncte ar fi coplanare, deci nu există o dreaptă comună tuturor celor trei plane. Mai rămîne posibilitatea să aibă un punct comun, punctul S şi din

$$\left.\begin{array}{l}S \in (ACC'A) \\ S \in (CC'BB')\end{array}\right\} \Rightarrow S \in CC' \Rightarrow$$

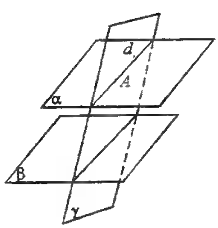


$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \alpha \bigcap \beta = \varnothing$

Presupunem $d \bigcap \beta = \varnothing \Rightarrow d \parallel \beta \Rightarrow d \in$ pl. $\parallel \beta$ dus prin $A \Rightarrow d \subset \alpha$, fals. Deci $d \bigcap \beta = \{B\}$.

11) Arătaţi că dacă două plane sînt paralele, atunci un plan care intersectează pe unul din ele după o dreaptă, taie şi pe celălalt.

Soluţie:



ipoteză: $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \bigcap \alpha = d_1$

concluzie: $\gamma \bigcap \beta = d_2$

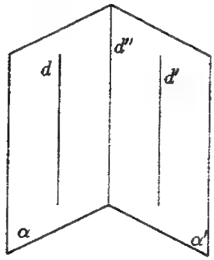
Presupunem că $\gamma \bigcap \beta = \varnothing \Rightarrow \gamma \parallel \beta$.

Fie $A \in d_1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \in \alpha, \ \ \alpha \parallel \beta \\ A \in \gamma, \ \ \gamma \parallel \beta \end{array}\right. \Rightarrow a = \gamma$ pentru că dintr-un punct se poate duce un singur plan paralel cu planul dat.

Dar acest rezultat este fals, contrazice ipoteză $\alpha \bigcap \gamma = d_1$, deci $\gamma \bigcap \beta = d_2$.

12) Prin dreptele paralele d şi d' se duc respectiv planele α şi α', distincte de (d, d'). Să se arate că $\alpha \parallel \alpha'$ sau $(\alpha \bigcap \alpha') \parallel d$.

Soluţie:



ipoteză: $d \parallel d', ; d \subset \alpha, d' \subset \alpha'; \alpha, \alpha' \neq (dd')$

concluzie: $\alpha \parallel \alpha'$ sau $d'' \parallel d$

Cum $\alpha, \alpha' \neq (dd') \Rightarrow \alpha \neq \alpha'$.

1. Dacă $\alpha \bigcap \alpha' = \emptyset \Rightarrow \alpha \parallel \alpha'$.
2. Dacă $\alpha \bigcap \alpha' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \bigcap \alpha' = d''$.

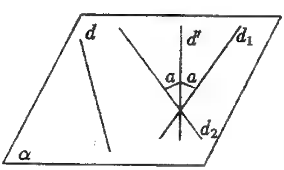
$$\begin{matrix} \text{Dacă } d \parallel d' \\ d' \subset \alpha' \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d \parallel \alpha' \\ d \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow d'' \parallel d.$$

13) Se dau un plan α, un punct $A \in \alpha$ şi o dreaptă $d \subset \alpha$.

a) Să se construiască o dreaptă d' a.î. $d' \subset \alpha, A \in d'$ şi $d' \parallel d$.

b) Să se construiască o dreaptă prin A inclusă în α, care formează cu d un unghi de măsură dată a. Cîte soluţii există.

Soluţii:



a) Dacă $A \in d$, atunci $d' = d$. Dacă $A \notin d$, ducem prin $A, d' \parallel d$.

b) Ducem $d_1 \subset \alpha, A \in d$, a.î. $m(\widehat{d_1 d'}) = a$ şi $d_2 \subset \alpha, A \in d_2$ a.î. $m(\widehat{d_2 d'}) = a$, cîte o dreaptă în fiecare semiplan determinat de d'. Deci $(\exists)$ 2 soluţii în afară de cazul $a = 0$ sau $a = 90$ cînd $(\exists)$ o singură soluţie.

14) Arătaţi că relaţia $\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta$ definită pe mulţimea planelor este o relaţie de echivalenţă. Determinaţi clasele de echivalenţă.

Soluţie:

$\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$

1) $\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha \sim \alpha$, relaţia este reflexivă

2) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$, relaţia este simetrică

$\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$ sau $\beta = \alpha \Rightarrow \beta \sim \alpha$

3) $\alpha \sim \beta \bigcap \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

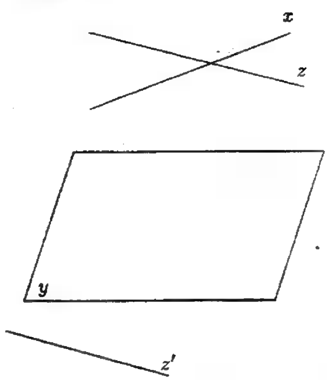
Dacă $\alpha = \beta \bigcap \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Dacă } \alpha \neq \beta \text{ şi } \alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta \\ \beta \sim \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \text{ sau } \beta \parallel \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$$

Clasa de echivalenţă determinată de planul α este construită din planele α' cu $\alpha' \sim \alpha$, adică din α şi toate planele paralele cu α.

15) Se consideră pe mulţimea tuturor dreptelor şi a planelor relaţia "$x \parallel y$" sau $x = y$, unde x şi y sînt drepte sau plane. Am definit o relaţie de echivalenţă?

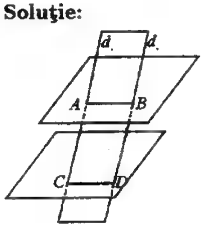
Soluţie:



Nu, este o relaţie de echivalenţă, întrucît proprietatea de tranzitivitate nu este adevărată. De exemplu x o dreapta, y un plan, z dreaptă. Din $x \parallel y$ şi $y \parallel z \not\Rightarrow x \parallel z$, dreptele x şi z putînd fi coplanare şi concurente sau necoplanare.

16) Arătaţi că două segmente paralele cuprinse între plane paralele, sunt concurente.

Soluţie:



$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (\exists)\gamma = (d_1 d_2)$

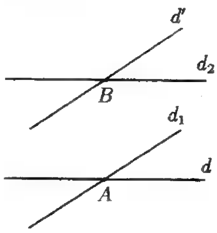
$$\left.\begin{array}{l}\alpha \bigcap \gamma = AB \\ \beta \bigcap \gamma = CD \\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}AB \parallel CD \\ AC \parallel BD\end{array} \Rightarrow ABCD \text{ paralelogram.}$$

Deci $\|AC\| = \|BD\|$.

17) Să se arate că prin două drepte, care nu sînt conţinute într-un acelaşi plan, se pot duce

plane paralele, în mod unic. Să se studieze şi situaţia cînd cele două drepte sînt coplanare.

Soluţie:

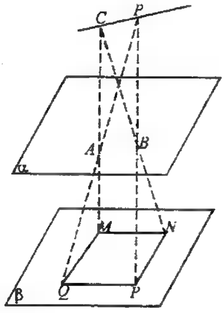


Luăm $A \in d$ şi ducem prin el $d_1 \parallel d'$. Luăm $B \in d'$ şi ducem $d_2 \parallel d$. Planul $(d_1d_2) \parallel (dd_1)$, întrucît două drepte concurente din primul plan sînt paralele cu două drepte concurente din al doilea plan.

Cînd d şi d' sînt coplanare, atunci cele patru drepte d, d_1, d_2 şi d' sînt coplanare şi cele două plane coincid cu planul dreptelor d şi d'.

18) Fie α şi β două plane paralele, $A, B \in \alpha$, iar CD o dreaptă paralelă cu α şi β. Dreptele CA, CB, DB, DA taie planul β respectiv în M, N, P, Q. Să se arate că aceste puncte sînt vîrfurile unui paralelogram.

Soluţie:



$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie planul } (CDA)\\ CD \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow CD \parallel QM \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie planul } (CDB)\\ CD \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow CD \parallel PN \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie planul } (CAB)\\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel MN \qquad (3)$$

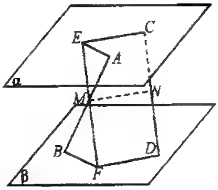
$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie planul } (DAB)\\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel QP \qquad (4)$$

Din (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow$ $MNPQ$ paralelogram.

19) Aflaţi locul geometric al mijloacelor segmentelor care au extremităţile în două plane paralele.

Soluţie:

Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două segmente cu $A, C \in \alpha$ şi $B, D \in \beta$ a.î. $|AM| = |MB|$ şi $|CN| = |ND|$.



În planul (MCD) ducem prin $M, EF \parallel CD \Rightarrow EC \parallel$
$\parallel DF \Rightarrow EFDC \Rightarrow$ paralelogram
$\Rightarrow |EF| \equiv |CD|$

Dreptele concurente AB şi EF determină un plan care taie planele α după 2 drepte paralele $\Rightarrow EA \parallel BF$.
În acest plan $|AM| \equiv |BM|$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{EMA} \equiv \widehat{BMF} \text{ (opuse la vîrf)} \\ \widehat{EAM} \equiv \widehat{FBM} \text{ (alterne intene)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AME \equiv \triangle BMF \Rightarrow |EM| \equiv |MF|$$

În paralelogramul $ECDF$, $|CN| \equiv |ND|$, $|EM| \equiv |MF| \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} MN \parallel EC \\ MN \parallel FD \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} MN \parallel \alpha \\ MN \parallel \beta \end{array} \qquad (1)$$

Deci segmentul ce uneşte mijloacele a două din segmentele cu extremitatea în α şi β este paralel cu aceste plane. Mai luăm $[GH]$ cu $G \in \alpha$, $H \in \beta$ şi $|GQ| \equiv |QH|$ şi arătăm la fel că $OM \parallel \alpha$ şi $OM \parallel \beta$. (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow M, N, Q$ aparţin unui plan paralel cu α şi β notat cu γ.

Reciproc să arătăm că orice punct din acest plan este mijlocul unui segment cu extremităţile în α şi β.

Fie seg.$[AB]$ cu $A \in \alpha$ şi $B \in \beta$ şi $|AM| = |BM|$. Prin M ducem planul paralel cu α şi β şi în acest plan luăm un punct arbitrar $O \in \gamma$.

Prin O ducem o dreaptă a.î. $d \cap \alpha = \{I\}$ şi $d \cap \beta = \{I\}$

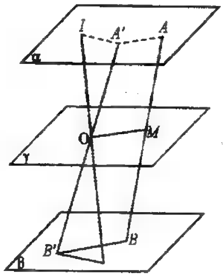
În planul (OAB) ducem $A'B' \parallel AB$. Planul $(AA'B'B)$ taie cele trei plane paralele după drepte paralele $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} A'A \parallel OM \parallel B'B \\ B \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

În planul $(A'B'I) \Rightarrow |A'O| \equiv |OB'| \Rightarrow IA' \parallel B'I$ şi deci $\begin{array}{c} |A'O| \equiv |OB'| \\ \widehat{IOA'} \equiv \widehat{IOB'} \end{array}$ şi $\widehat{IA'O} \equiv \widehat{IB'O}$

$\Rightarrow \triangle IOA' \equiv \triangle IOB' \Rightarrow |OI| \equiv |IO| \Rightarrow O$ este mijlocul unui segment cu extremităţi în planele α şi β.

Deci locul geometric este planul γ, paralel cu α şi β şi trecînd pe la mijlocul distanţei dintre α şi β.

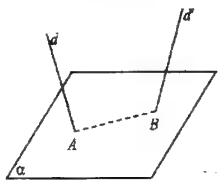


PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Prin două drepte date să se ducă este un plan, a.î. dreapta lor de intersecţie să fie conţinută într-un plan dat.

Soluţie:

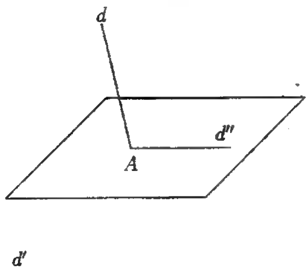
1. Presupunem că $d \cap \alpha \neq \emptyset$ şi $d' \cap \alpha = \{B\}$.



Fie $d \cap \alpha = \{A\}$ şi $d' \cap \alpha = \{B\}$ şi planele determinate de perechi de drepte concurente (d, AB); (d', AB).

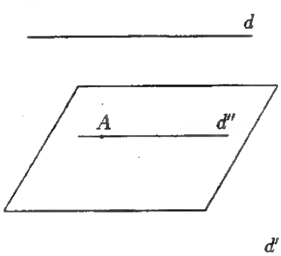
Observăm că acestea sînt planele cerute, întrucît $d \subset (d, AB)$, $d' \subset (d', AB)$ şi $(d, AB) \cap \cap (d', AB) = AB \subset \alpha$.

2. Presupunem $d \cap \alpha = \{A\}$ şi $d' \parallel \alpha$.



Ducem prin A, în planul α, dreapta $d' \parallel d$ şi considerăm planele (d, d'') şi (d', d'') şi observăm că $(d, d'') \cap (d', d'') = d'' \subset \alpha$

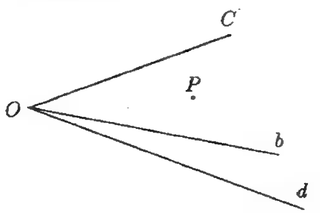
3. Presupunem $d \cap \alpha = \emptyset$ şi $d' \cap \alpha = \emptyset$ şi $d' \in$ direcţiei d.



Fie $A \in \alpha$ şi $d'' \parallel d \Rightarrow d'' \parallel d'$ şi planele sunt (d, d'') şi (d', d''). Se judecă ca mai sus.

2) Fie a, b, c trei drepte cu un punct comun, iar P un punct nesituat pe ele. Să se arate că planele (Pa), (Pb), (Pc) conţin o dreaptă comună.

Soluţie:



$$a \cap b \cap c = \{O\}$$

$$\left.\begin{array}{l} P \in (Pa) \\ O \in (Pa) \end{array}\right\} \Rightarrow OP \subset (Pa)$$

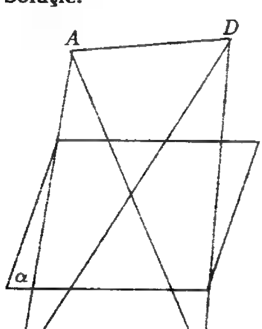
$$\left.\begin{array}{l} P \in (Pb) \\ O \in (Pb) \end{array}\right\} \Rightarrow OP \subset (Pb)$$

$$\left.\begin{array}{l} P \in (Pc) \\ O \in (Pc) \end{array}\right\} \Rightarrow OP \subset (Pc)$$

$$\Rightarrow (Pa) \cap (Pb) \cap (Pc) = OP$$

3) Fie A, B, C, D puncte, iar α un plan care separă punctele A şi B; A şi C; C şi D. Arătaţi că $\alpha \cap |BD| \neq \emptyset$ şi $\alpha \cap |AD| = \emptyset$.

Soluţie:



Dacă α separă punctele A şi B înseamnă că ele se găsesc în semispaţii diferite şi fie $\sigma = |\alpha A$ şi $\sigma' = |\alpha B$.

Întrucît α seppară pe A şi $C \Rightarrow C \in \sigma'$

Întrucît α seppară pe C şi $D \Rightarrow D \in \sigma$

Din $B \in \sigma'$ şi $D \in \sigma \Rightarrow \alpha$ separă punctele B şi $D \Rightarrow |BD| \cap \alpha \neq \emptyset$.

Din $A \in \sigma$ şi $D \in \sigma \Rightarrow |BD| \cap \alpha = \emptyset$.

4) Pe muchiile a, b, c, ale unui unghi triedru de vîrf O se iau punctele A, B, C; fie apoi $D \in |BC|$ şi $E \in |AD|$. Arătaţi că $|OE \subset \text{int.}\widehat{abc}$.

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{l} B \in (ab) \\ C|(a,b), c \end{array}\right\} \overset{pr.1, pag.58}{\Longrightarrow} [BC] \subset |(a,b), c \Rightarrow$$

$\Rightarrow |OE \subset |(bc), A$ (2)

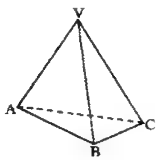
$$\left.\begin{array}{l} C \in (ac) \\ B \in |(ac), c \end{array}\right\} \Rightarrow [CB] \subset |(ac), B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D \in |(ac), B \\ A \in (a, c) \end{array}\right\} \Rightarrow [AD] \subset |(ac), B$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} E \in |(ac), B \\ O \in (a, c) \end{array}\right\} \Rightarrow [AD] \subset |(ac), B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} E \in |(ac), B \\ O \in (ac) \end{array}\right\} \Rightarrow |OE \subset |(ac), B \qquad (3)$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow |OE \subset |(ab), c \cap |(bc), A \cap |(ac), B = \text{int. } \widehat{abc}$.

5) Arătaţi că următoarele mulţimi sînt convexe: interiorul unui unghi triedru, un tedraedru fără o muchie (fară o faţă).

Soluţie:



a) $\text{int.}(|VA, \widehat{|VB}, |VC) = |(VAB), C \cap |(VBC), A \cap |(VAC), B$ deci este intersecţie de mulţimi convexe, şi deci interiorul unui triedru este mulţime convexă.

b) Tetraedrul $[VABC]$ fără muchia $[AC]$. Notăm cu $\mathcal{M}_1 = [ABC] - -[AC] = [AB, C \cap [BC, A \cap |AC, B$ deci este mulţime convexă, fiind intersecţie de mulţimi convexe.

$|(ABC), V \cap \mathcal{M}_1$ este mulţime convexă.

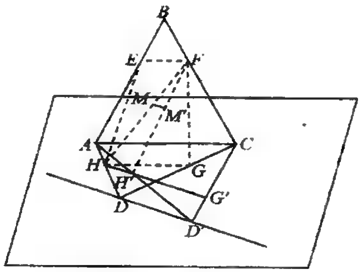
La fel $|(VAC), B \cup \mathcal{M}_2$ este mulţime convexă, unde $\mathcal{M}_2 = [VAC] - [AC]$. Dar $[VABC] - [AC] = [(VAB), C \cap [(VBC), A \cap (|(ABC), V \cup \mathcal{M}_1) \cap (|(VAC), B \cup \mathcal{M}_2)$ şi deci este mulţime convexă ca intersecţie de mulţimi convexe.

c) Tetraedru $[VABC]$ fără faţă $[ABC]$

$[VABC] - [ABC] = [(VAB), C \cap [(VBC), A \cap [(VAC), B \cap |(ABC), V$ deci intersecţie de mulţimi convexe $\Rightarrow$ este mulţime convexă.

6) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare şi E, F, G, H mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Să se arate că $EF \parallel (ACD)$ şi punctele E, F, G, H sînt coplanare.

Soluţie:



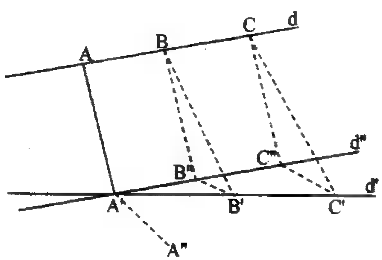
a) În pl. (BAC) avem $EF \parallel AC$. În pl. (DAC) avem $AC \subset (DAC) \Rightarrow EF \parallel (DAC)$. Tot în acest plan $HG \parallel AC$. Deci $EF \parallel HG \Rightarrow E, F, G, H$ sînt coplanare şi cum $\|EF\| = \frac{\|AC\|}{2} =$
$= \|HG\| \Rightarrow EFGH$ este paralelogram.

7) Pe dreptele d, d' se iau punctele distincte A, B, C respectiv A', B', C'. Să se arate că putem duce prin dreptele AA', BB', CC' trei plane paralele între ele dacă şi numai dacă

$$\frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}.$$

Soluţie:

Presupunem că avem $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ a.î. $AA' \subset \alpha,\ BB' \subset \beta,\ CC' \subset \gamma$.



Ducem prin A' o dreaptă paralelă cu d : $d'' \parallel d$. Cu, d intersectează toate cele 3 plane $A' \subset d''$ în $A, B, C \Rightarrow$ şi $\parallel$ sa d'' le taie în A', B'', C''.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cum } \alpha \parallel \beta \parallel \gamma \\ d \parallel d''\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\|AB\| = \|AB''\| \\ \|BC\| = \|B''C''\|\end{array} \qquad (1)$$

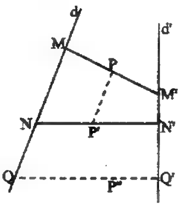
Fie planul (d', d''). Cum acest plan are comun cu planele α, β, γ respectiv punctele A', B'', C'' şi cum $a \parallel \beta \parallel \gamma \Rightarrow$ el le intersectează după drepte paralele $\Rightarrow A'A'' \parallel B'B'' \parallel$

$$\parallel C'C'' \xRightarrow{Tales} \frac{\|A'B''\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|B''C''\|}{\|B'C'\|}. \qquad (2)$$

Ţinind cont de (1) şi (2) $\Rightarrow \dfrac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \dfrac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$. Reciprocă se arată similar.

8) Fie M, M' cîte un punct mobil pe dreptele necoplanare d, d'. Să se afle locul geometric al punctelor P care împarte segmentul $|MM'|$ într-un raport dat.

Soluţie:



Fie $P \in |MM'|$ a.î. $\dfrac{\|MP\|}{\|PM'\|} = k$

şi $P' \in |NN'|$ a.î. $\dfrac{\|NP'\|}{\|P'N'\|} = k$.

Deci $\dfrac{\|MP\|}{\|PM'\|} = \dfrac{\|NP'\|}{\|P'N'\|} \Rightarrow \dfrac{\|MP\|}{\|NP'\|} = \dfrac{\|PM'\|}{\|P'N'\|}$

$\Rightarrow$ conform problemei 7 că se pot duce trei plane $\parallel$ $\beta \parallel \alpha \parallel \gamma$ a.î. $MN \subset \beta$, $PP' \subset \alpha$, $M'N' \subset \gamma$.

$$\left.\begin{array}{l}\beta \parallel \alpha \\ MN \subset \beta\end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel \alpha \Rightarrow d \parallel \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \gamma \\ M'N' \subset \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow M'N' \parallel \alpha \Rightarrow d' \parallel \alpha \text{ şi } PP' \subset \alpha.$$

Deci fixînd P şi lăsînd P' variabil $P' \in$ unui plan paralel cu cele două drepte şi care trece prin P. Se ştie că acest plan este unic, fiindcă ducînd prin P paralele la d şi d' pentru a obţine acest plan el este bine determinat de 2 drepte concurente.

Reciproc: Fie $P'' \in \alpha$ adică planului ce trece prin P şi este paralel cu d şi d'.

$$\left.\begin{array}{l}(P'',d) \text{ det. un plan}\\ (P'',d') \text{ det. un plan}\end{array}\right\}$$ cele două plane avînd un punct comun se intersectează după o dreaptă $(P'',d)\bigcap(P'',d') = QQ'$ unde $Q \in d$ şi $Q' \in d'$.

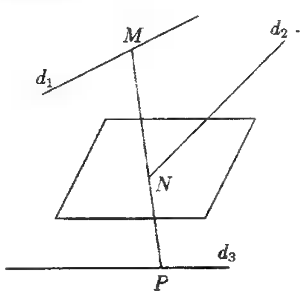
Cum $d \parallel \alpha \Rightarrow MQ \parallel \alpha \Rightarrow (\exists)\beta$ a.î. $MQ \subset \beta,\ \beta \parallel \alpha$.

Cum $d' \parallel \alpha \Rightarrow M'Q' \parallel \alpha \Rightarrow (\exists)\gamma$ a.î. $M'Q' \subset \gamma,\ \gamma \parallel \alpha$.

Deci locul geometric căutat este un plan paralel cu d şi d'.

9) Să se construiască o dreaptă care să întîlneasă trei drepte date respectiv în M, N, P şi pentru care $\dfrac{\|MN\|}{\|NP\|}$ să fie raport dat.

Soluţie:



Considerăm planul care conform problemei 8 reprezintă locul geometric al punctelor care împart segmentele cu extremităţile pe dreptele d_1 şi d_3 într-un raport dat k. Pentru obţinerea acestui plan se ia un punct $A \in d_1$, $B \in d_3$ şi punctul $C \in AB$ a.î. $\dfrac{\|AC\|}{\|CB\|} = k$. Prin acest punct C se duc două paralele la d_1 şi d_3 care determină planul menţionat α.

Fie $d_2 \bigcap \alpha = \{N\}$. Trebuie determinat un segment care să treacă prin N şi să aibe extremităţile pe d_1 şi d_3 respectiv în M şi P. Întrucît dreapta căutată trece prin N şi M

$$\left.\begin{array}{l}N \in (N,d_1)\\ M \in (N,d_1)\end{array}\right\} \Rightarrow MN \subset (Nd_1) \qquad (1)$$

Aceiaşi dreaptă trebuie vă treacă prin N şi P şi cum $\left.\begin{array}{l}N \in (N,d_1)\\ P \in (N,d_3)\end{array}\right\} \Rightarrow NP \subset (Nd_3) \quad (2)$

M, N, P coliniare.

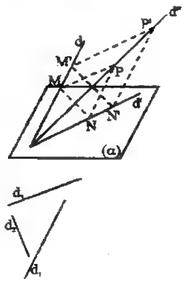
Din (1) şi (2) $\Rightarrow MP \subset (N,d)\bigcap(N,d_3) \Rightarrow MP = (Nd_1)\bigcap(d_2N)$

Atunci conform problemei 8: $\dfrac{\|MN\|}{\|NP\|} = k$ şi dreapta căutată este MP.

10) Să se afle locul geometric al vîrfului P al triunghiului M, N, P dacă laturile acestuia rămîn paralele cu trei drepte fixe, vîrful M descrie o dreaptă dată d, iar vîrful $N \in$ unui plan

dat α.

Soluţie:



Fie ΔMNP a.î. $MP \parallel d_1$, $MN \parallel d_2$, $PN \parallel d_3$. $M \in d, N \in \alpha$

Fie $\Delta M'P'N'$ a.î. $M' \in d$, $N' \in \alpha$, $M'P' \parallel d_1$; $M'N' \parallel d_2$; $P'N' \parallel d_3$.

Dreapta MP generează un plan β, fiind paralelă cu o direcţie d_1 şi sprijinindu-se pe o dreaptă dată d.

La fel, dreapta MN generează un plan γ deplăsîndu-se paralel cu o direcţie d_2 fixă şi sprijinindu-se pe o dreaptă dată d. Cum γ conţine pe $d \Rightarrow O$ este punct comun pentru α şi $\gamma \Rightarrow \alpha \cap \gamma \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \gamma = d'$, $O \in d'$.

$\left.\begin{array}{l} N \in \alpha \\ N \in \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow N \in \alpha \cap \gamma$ $(\forall)$ Δ considerat, deci N descrie tot o dreaptă $d' \subset \alpha$.

Cum planul γ este bine determinat de dreapta d şi direcţia d_2, este fix, deci $d' = \alpha \cap \gamma$ este fixă.

La fel, PN va genera un plan δ, deplăsîndu-se paralel cu direcţia fixă d_3 şi sprijinindu-se pe dreapta fixă d'.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Cum } O \in d' \\ O \in d \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} O \in \delta \\ O \in \beta \end{array}\right. \Rightarrow \beta \cap \delta \neq \emptyset \Rightarrow O \in \beta \cap \delta = d''$$

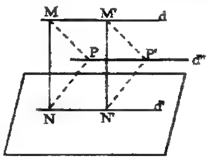
$$\left.\begin{array}{l} P \in MP \Rightarrow P \in \beta \\ P \in PN \Rightarrow P \in \delta \end{array}\right\} \Rightarrow P \in \beta \cap \delta \ (\forall) P \text{ vîrf variabil, } P \in d''.$$

Deci pentru orice ΔMNP în condiţiile date, vîrful $P \in d''$.

Reciproc, fie $P' \in d''$. În planul (d', d'') ducem $P', M' \parallel PM \Rightarrow (M'P'N') \parallel (PMN) \Rightarrow$ $\Rightarrow (dd')$ intersecţia a două plane paralele după drepte paralele $\Rightarrow M'N' \parallel MN$ şi $\Delta M'P'N'$ astfel construit are laturile paralele cu cele trei drepte fixe are $M' \in d$ şi $N' \in \alpha$, deci este unul din triunghiurile date în text.

Deci locul geometric este dreapta d'' a cărei construcţie am văzut cum să realizează şi care trece prin O.

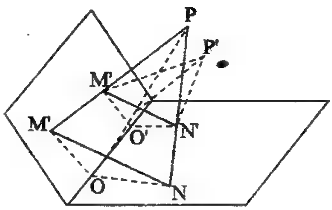
În cazul $D \parallel \alpha$ obţinem



$$\left.\begin{array}{l} d\subset\beta\\ \delta'\subset\delta\\ d\parallel d'\end{array}\right\}\Rightarrow \beta\cap\delta=d'' \text{ şi } d''\parallel d$$

În acest caz locul geometric este o dreaptă paralelă cu d.

b)



$$\begin{array}{lll} \text{Fie } MNP \text{ şi} & \text{Fie } M'N'P' \text{ a.î.} & \\ MP\parallel d_1 & M'P'\parallel d_1 & \\ MN\parallel d_2 & M'N'\parallel d_2 & \Rightarrow \left.\begin{array}{l} MP\parallel M'P'\\ MN\parallel M'N'\\ NP\parallel N'P'\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle MNP\sim\triangle M'N'P'\Rightarrow \\ NP\parallel d_3 & N'P'\parallel d_3 & \\ M\in\beta,\ N\in\alpha & M'\in\beta,\ N'\in\alpha & \end{array}$$

$\Rightarrow (MNP)\parallel(M'N'P')$.

Presupunem $\alpha\cap\beta=d$ şi fie $d\cap(MNP)=\{O\}$ şi $d\cap(M'N'P')=\{O'\}\Rightarrow$

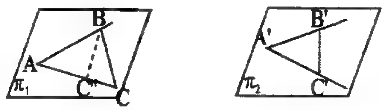
$$\left.\begin{array}{l} (MNP)\cap\beta=MO\\ (M'N'P')\cap\beta=M'O'\end{array}\right\}\Rightarrow MO\parallel M'O' \text{ un plan taie planele paralele după drepte paralele.}$$

La fel $ON\parallel O'N'$ şi cum $MN\parallel M'N'\Rightarrow\ \triangle OMN\sim\triangle O'M'N'$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{\|OM\|}{\|O'M'\|}=\dfrac{\|ON\|}{\|O'N'\|}=\dfrac{\|MN\|}{\|M'N'\|}\\ \widehat{OMN}=\widehat{O'M'N'}\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle MNP\sim M'N'P'\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{\|MP\|}{\|M'P'\|}=\dfrac{\|MN\|}{\|M'N'\|}\\ \widehat{MNP}=\widehat{M'N'P'}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle OMP \sim O'M'P' \qquad (1) \Rightarrow \begin{array}{l} \widehat{MOP} \equiv \widehat{M'O'P'} \\ \widehat{MPO} \equiv \widehat{M'P'O'} \end{array}$$

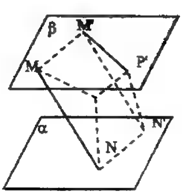
Folosim proprietatea: Fie π_1 şi π_2 2 plane paralele şi $A, B, C, \subset \pi_1$ şi $A', B', C', \subset \pi_2$ $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $\widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{A'B'C'}$, $\|AB\| = \|A'B'\|$, $\|AC\| = \|A'C'\|$.



Să arătăm că $BC \parallel B'C'$. Într-adevăr $(BB'C')$ este un plan care intersectează cele 2 plane după drepte paralele.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} B'C' \parallel BC'' \\ AB \parallel A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \widehat{ABC''} \equiv \widehat{A'B'C'} \\ \text{dar } \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABC''} \Rightarrow |BC = |BC'' \Rightarrow$$
$B'C' \parallel BC$.

Aplicînd în (1) această proprietate $\Rightarrow OP \parallel O'P'$. Păstrînd OP fix şi lăsînd P' variabil mereu $O'P' \parallel OP$, deci $O'P'$ generează un plan ce trece prin d. Presupunem $\beta \parallel \alpha$.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ MN \parallel M'N' \end{array}\right\} \Rightarrow |MN| \equiv |M'N'|$$

$\Rightarrow MNN'M'$ paralelogram

$\Rightarrow MM' \parallel NN'$

$\Rightarrow MM' \parallel (NN'P'P)$

$\Rightarrow (MPP'M') \cap (MN'P'P) = PP'$

şi $PP' \parallel MM' \Rightarrow PP' \parallel NN'$

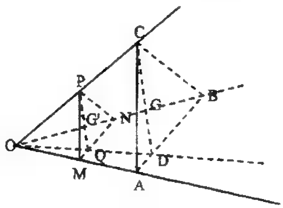
Considerînd P' fix şi P variabil $\Rightarrow PP' \parallel \alpha$ şi mulţimea paralelelor duse $PP' \parallel \beta$ la un plan printr-un punct exterior este un plan paralel cu cel dat.

Deci locul geometric este un plan parallel cu α şi β.

11) Pe muchiile $[OA$, $[OB$, $[OC$ ale unui unghi triedru se consideră respectiv punctele M, N, P a.î. $\|OM\| = \lambda\|OA\|$, $\|ON\| = \lambda\|OB\|$, $\|OP\| = \lambda\|OC\|$, unde λ este un număr pozitiv variabil. Să se arate locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MNP.

Soluţie:

$\|OM\| = \lambda\|OA\| \Rightarrow \|\dfrac{\|OM\|}{\|OA\|} = \lambda$; $\|ON\| = \lambda\|OB\| \Rightarrow \|\dfrac{\|ON\|}{\|OB\|} = \lambda$;



$\|OP\| = \lambda\|OC\|, \Rightarrow \dfrac{\|OP\|}{\|OC\|} = \lambda$

În planul DAC avem:

$\dfrac{\|OM\|}{\|OA\|} = \dfrac{\|OP\|}{\|OC\|} \overset{?}{\Longrightarrow} PM \parallel AC.$

În planul DAB avem:

$\dfrac{\|OM\|}{\|OA\|} = \dfrac{\|ON\|}{\|OB\|} \Rightarrow MN \parallel AB.$

În planul OBC avem:

$\dfrac{\|ON\|}{\|OB\|} = \dfrac{\|OP\|}{\|OC\|} \Rightarrow PN \parallel BC.$

Din $PM \parallel AC$ şi $PN \parallel BC \Rightarrow (MNR) \parallel (ABC)$

Fie Q şi D respectiv mijloacele laturilor $|MN|$ şi $|AB|$

$$\left.\begin{array}{r}\triangle OMN \sim OAB \Rightarrow \dfrac{\|OM\|}{\|OA\|} = \dfrac{\|MN\|}{\|AB\|} = \dfrac{\frac{1}{2}\|MN\|}{\frac{1}{2}\|AB\|} = \dfrac{\|MN\|}{\|AB\|} \\ \widehat{OMQ} = \widehat{OAB}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OMQ \sim OAD \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{MOQ} = \widehat{AOD} \Rightarrow O, Q, D$ sunt colineare.

Dreptele concurente OD şi OC determină un plan care taie planele paralele $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} PQ \parallel CD \\ \text{în } (OCD)\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OPQ \sim \triangle OCD \Rightarrow \dfrac{\|OP\|}{\|OC\|} = \dfrac{\|PQ\|}{\|CD\|} = \dfrac{\frac{2}{3}\|PQ\|}{\frac{2}{3}\|CD\|} = \dfrac{\|PG'\|}{\|CB\|} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{OPG'} \equiv \widehat{OCQ} \Rightarrow \triangle OPG' \sim \triangle OCQ \Rightarrow \widehat{POG'} \equiv \widehat{COG} \Rightarrow O, G', G$ sînt colineare deci $G' \in |OG \Rightarrow$ locul geometric căutat este semidreapta $|OG$.

Reciproc: luăm un punct pe $|OG$, G'' ducem prin el un plan parallel cu (ABC), planul (M'', N'', P''), se formează triunghiuri asemenea şi apar rapoartele din ipoteză.

12) $ABCD$ şi $A_1B_1C_1D_1$ fiind două paralelograme oarecare în spaţiu se iau punctele A_2, B_2, C_2, D_2 care împart segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ în acelaşi raport. Să se arate că A_2, B_2, C_2, D_2 este un paralelogram.

Soluţie:

Fie A_2, B_2, C_2, D_2 a.î. $\dfrac{\|AA_2\|}{\|A_2A_1\|} = \dfrac{\|BB_2\|}{\|B_2B_1\|} = \dfrac{\|CC_2\|}{\|C_2C_1\|} = \dfrac{\|DD_2\|}{\|D_2D_1\|} = k.$

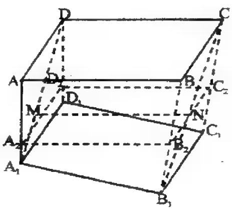
Luăm pe dreptele AD_1 şi BC_1 punctele M şi N a.î. $M \in |AD_1|$, $\dfrac{\|AM\|}{\|MD_1\|} = k$ şi

$N \in |BC_1|, \dfrac{\|BN\|}{\|NC_1\|} = k$

Din $\dfrac{\|AA_2\|}{\|A_2A_1\|} = \dfrac{\|AM\|}{\|MD_1\|} = k \overset{T.Tales}{\Longrightarrow} A_2M \parallel A_1D_1$ (1)

$A_2M \parallel A_1D_1 \Rightarrow \triangle AA_2M \sim \triangle AA_1D_1 \Rightarrow \dfrac{\|AA_2\|}{\|AA_1\|} = \dfrac{\|A_2M\|}{\|A_1D_1\|}$

Urmează



$\dfrac{\|A_1M_1\|}{\|A_2D_1\|} = \dfrac{k}{k+1} \Rightarrow \|A_2M\| = \dfrac{k}{k+1}\|A_1D_1\|$ (2)

La fel $\dfrac{\|BB_2\|}{\|B_2B_1\|} = \dfrac{\|BN\|}{\|NC_1\|} = k \Rightarrow B_2N \parallel B_1C_1$ (3)

$B_2N \parallel B_1C_1 \Rightarrow \triangle BB_1N \sim \triangle BB_1C,$

$\Rightarrow \dfrac{\|BB_2\|}{\|BB_1} = \dfrac{\|B_2N\|}{\|B_1C_1\|}$. Cum $\dfrac{\|BB_2\|}{\|BB_1} = \dfrac{\|AA_2\|}{\|AA_1\|} = \dfrac{k}{k+1}$.

obţinem $\dfrac{\|B_2N\|}{B_1C_1} = \dfrac{k}{k+1} \Rightarrow \|B_2N\| = \dfrac{k}{k+1}\|B_1C_1\|$ (4)

Din $A_1D_1 \parallel B_1C_1 \Rightarrow \|A_1D_1\| \parallel \|B_1c_1\|$

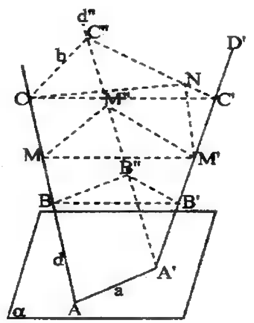
(1), (2), (3), (4) $\Rightarrow A_2M \parallel B_2N$ şi $\|A_2M\| = \|B_2N\| \Rightarrow A_2D_2NM$ este paralelogram.

$\Rightarrow A_2B_2 \parallel MN$, $\|A_2B_2\| \parallel \|MN\| \Rightarrow D_2C_2NM$ paralelogram.

$\Rightarrow D_2C_2 \parallel MN$, $\|D_2C_2\| \parallel \|MN\|$ deci $A_2B_2 \parallel D_2C_2$ şi $\|A_2D_2\| \parallel \|D_2C_2\| \Rightarrow A_2B_2C_2D_2$ paralelogram.

13) Se dau dreptele d, d' care taie un plan dat α în A şi A'. Să se construiască punctele M, M' situate respectiv pe d, d' a.î. $MM' \parallel \alpha$ şi segmentul $[MM']$ să aibe o lungime dată l. Discuţie.

Soluţie:



Ducem prin A' o dreaptă d'' $\parallel$ d. Ducem două plane paralele cu α, care vor intersecta cele trei drepte respectiv în B', B^*, B şi C, C', C^*. Planul (d, d^*) intersectează planele α, $(BB'B^*)$, $(CC'C^*)$ după drepte paralele $\left.\begin{array}{c} AA' \parallel BB^* \parallel CC^* \\ d \parallel d^* \end{array}\right\} \Rightarrow \|AA'\| = a = \|BB^*\| = \|CC^*\|$. Planul (d', d^*) intersectează planele paralele $(BB'B^*)$, $(CC'C^*)$ după drepte paralele $\Rightarrow B'B^* \parallel C'C^*$, $BB^* \parallel CC^* \Rightarrow \widehat{BB'B^*} \equiv \widehat{CC'C^*}$.

Deci $(\forall)$ plan paralel cu α pe care îl construim, triunghiul obţinut are o latură construită de lungime a şi unghiul corespunzător lui $\widehat{BB^*B'}$ constant. Notăm cu o linie acea poziţie a plan pentru care lugimea opusă unghiului căutat este l. Cu vîrful compasului în C şi o deschidere egală cu l, trasăm un arc de cerc care taie segmentul $|C^*C'|$ în N sau dr. C^*C'. Prin N ducem în (d^*d') o paralelă la d^* care întîlneşte precis de d' într-un punct M'. Prin M' ducem planul $\parallel$ la α care va intersecta cele trei drepte în M, M', M^*.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} NM' \parallel C^*M^* \\ C^*N \parallel M^*M' \end{array}\right\} \Rightarrow M^*M'NC^* \text{ paralelogram}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \|NM'\| = \|C^*M^*\| \\ NM' \parallel C^*M \end{array}\right\} (1) \\ \left.\begin{array}{l} CM \parallel C^*M^* \\ \|CM\| = \|C^*M^*\| \end{array}\right\} (2) \end{array}\right\} NM' \parallel CM, \|NM'\| = \|CM\| \Rightarrow CNM'M \text{ paralelogram}$$

$\Rightarrow \|MN'\| = \|CN\| = l$ iar dreapta MM' aflîndu-se, într-un plan paralel cu α este paralelă cu α.

Discuţie:

Presupunînd planul $(CC'C^*)$ variabil, cum $\|CC^*\|$ şi $C\widehat{C^*}C'$ sînt constante atunci şi $d(C, C^*C') = b =$ constant

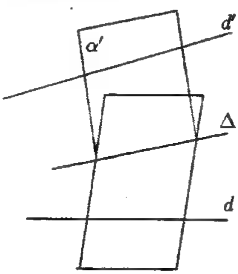
Dacă $l < d$ nu avem soluţii

Dacă $l = d$ $(\exists)$ o soluţie, cercul de raza l, tangent la C^*C'

Dacă $l > d$ $(\exists)$ două soluţii: cercul de raza l, taie C^*C' în două puncte N şi P.

14) Să se construiască o dreaptă care să treacă printr-un punct dat A şi să fie perpendiculară pe două drepte date d şi d'.

Soluţie:



Ducem prin A planele $\alpha \perp d$ şi $\alpha' \perp d'$

Cum A este punct comun $\Rightarrow \alpha \bigcap \alpha' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \bigcap \alpha' = \Delta \Rightarrow A \in \Delta$.

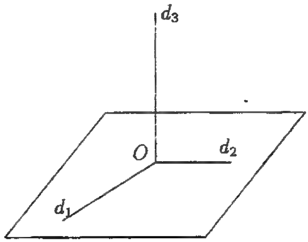
$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha \Rightarrow d \perp D \\ d' \perp \alpha' \Rightarrow d' \perp D \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \text{ dreapta căutată}$$

Dacă $\alpha \neq \alpha'$- soluţia este unică.

Dacă $\alpha = \alpha'$ $(\forall)$ dreaptă din α ce trece prin A corespunde problemei deci $(\exists)$ o infinitate de soluţii.

15) Să se arate că există trei drepte cu un punct comun, perpendiculare două este două.

Soluţie:



Fie $d_1 \perp d_2$, două drepte concurente şi perpendiculare $d_1 \bigcap d_2 = \{O\}$.

Ele determină un plan $\alpha = (d_1, d_2)$ şi $O \in \alpha$. Construim perpendiculara pe α în O.

$d_3 \perp \alpha$, $O \in d_3 \to d_3 \perp d_1$, $d_3 \perp d_2$.

16) Fie a, b, c, d patru drepte cu un punct comun, d fiind perpendicalară pe a, b, c. Să se arate că dreptele a ,b, c sînt coplanare.

Soluţie:

Folosim metoda reducerii la absurd.

Fie $d \perp a$, $d \perp a$, $d \perp c$. Presupunem că aceste drepte nu sunt coplanare. Fie $\alpha = (b,\ c)$, $\alpha' = (a,\ b)$, $\alpha \neq \alpha'$. Rezultă $d \perp \alpha$, $d \perp \alpha'$.

Deci prin punctul O se pot duce 2 plane perpendiculare pe d. Fals $\Rightarrow$ a, b, c sunt coplanare.

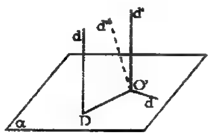
17) Arătaţi că nu există 4 drepte cu un punct comun, perpendiculare două cîte două.

Soluţie:(reducere la absurd)

Fie $a \bigcap b \bigcap c \bigcap d = \{O\}$ şi perpendiculare două cîte două. Din $d \perp a$; $d \perp b$; $d \perp c \Rightarrow a$, b, c cînt coplanare şi $b \perp a, c \perp a$ deci în punctul O se pot duce pe d două perpendiculare distincte. Fals. Deci cele 4 drepte nu pot fi perpendiculare 2 cîte 2.

18)Fie $d \perp \alpha$ şi $d' \parallel d$. Arătaţi că $d' \perp \alpha$.

Soluţie:(reducere la absurd)



Presupunem că $d \not\perp \alpha$.

În $d' \cap \alpha = \{O\}$ ducem dreapta $d'' \perp \alpha$. Dreptele d' şi d'' fiind concurente determină un plan $\beta = (d', d'')$ şi cum $O' \in \beta$, $O' \in \alpha \Rightarrow$

$$\alpha \cap \beta = a \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ a \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} d'' \perp \alpha \Rightarrow d'' \perp a & (1) \\ d \perp \alpha \Rightarrow d \perp a & \\ d' \parallel d \Rightarrow d' \perp a & (2) \end{array}$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ că în planul β pe dreapta a în punctul O' s-au dus două perpendiculare distincte. Fals. Deci $d' \parallel \alpha$,

19) Să se arate că două drepte distincte perpendiculare pe un plan α sunt paralele.

Soluţie:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Fie } d \perp \alpha \\ d' \perp \alpha \\ d \neq d' \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel d'$$

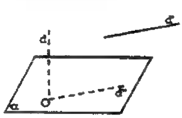
Reducere la absurd. Fie $d \nparallel d'$. Ducem $d'' \parallel d$ prin O'.

$$\left.\begin{array}{r} d'' \parallel d \\ d \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} d'' \perp \alpha \\ d' \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \text{în punctul } O' \text{ se pot duce două perpendiculare pe planul } \alpha. \text{ Fals.}$$

Deci $d \parallel d'$.

20) Fie $d \perp \alpha$ şi $d' [\| \alpha$. Arătaţi că $d' \perp d$.

Soluţie:

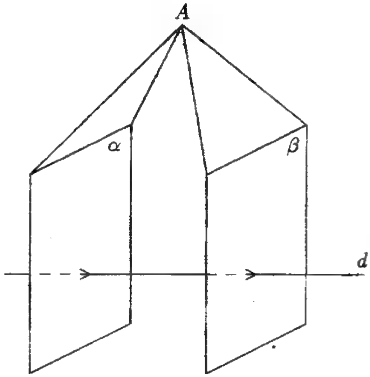


Fie $d \perp \alpha$ şi $d \cap \alpha = \{O\}$. Ducem prin O o paralelă la d', care va fi conţinută în α, atunci $d' \parallel \alpha$.

$d'' \parallel d'$, $O \in d'' \Rightarrow d'' \subset \alpha$, $d \perp \alpha \Rightarrow d \perp d'' \Rightarrow d \perp d'$.

21) Arătaţi că două plane perpendiculare pe aceiaşi dreaptă sînt paralele între ele.

Soluţie:

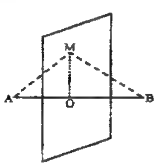


Presupunem$\alpha \not\parallel \beta \Rightarrow \alpha \bigcap \beta \neq \emptyset$ şi fie $A \in \alpha \bigcap \beta \Rightarrow$ printr-un punct A se pot duce două plane distincte parpendiculare pe această dreaptă. Fals.

$\Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

22) Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte distincte A şi B este un plan perpendicular pe AB, care trece prin mijlocul O al segmantului $[AB]$ (numit plan mediator al lui $[AB]$).

Soluţie:



Fie M un punct din spaţiu cu proprietatea $\|MA\| = \|MB\|$. Unim M cu mijlocul segmentului $[AB]$ punctul O.

$\Rightarrow \triangle AMO = \triangle BMO \Rightarrow MO \perp AB$. Deci M se află pe o dreaptă dusă prin O, perpendiculara pe AB.

Dar reuniunea tuturor perpendicularelor duse prin O pe AB este planul perpendicular pe AB în punctul O, notat cu α, deci $M \in \alpha$.

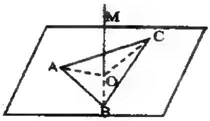
Reciproc: fie $M \in \alpha$

$d = AB \perp \alpha \Rightarrow d \perp MO$

$$\left.\begin{array}{l} [AO] \equiv [OM] \\ [MO] \text{ latură comună} \\ MO \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMO \equiv \triangle BMO \Rightarrow \|MA\| = \|MB\|.$$

23) Să se afle locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de vîrfurile unui triunghi ABC.

Soluţie:



Fie M un punct din spaţiu cu această proprietate $\|MA\| = \|MB\| = \|MC\|$

Fie O centrul cercului circumscris $\triangle ABC \Rightarrow \|OA\| = OB\| = \|OC\|$, deci O este şi el un punct al locului geometric căutat.

Comform problemei precedente locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de A şi B se află în planul mediator al segmentului $[AB]$ care conţine şi pe M. Notăm cu α acest plan. Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de B şi de C se află în planul mediator al segmentului $[BC]$, notăm β, care conţine şi pe O şi pe M.

Deci $\alpha \cap \beta = OM$.

$$\left.\begin{array}{l} AB\perp\alpha \Rightarrow AB\perp OM \\ BC\perp\alpha \Rightarrow BC\perp OM \end{array}\right\} \Rightarrow OM\perp(ABC)$$

deci $M \in$ perpendicularei pe planul (ABC) în centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.

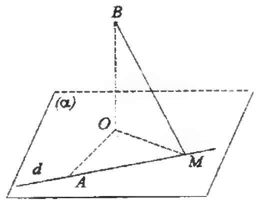
Reciproc, fie $M \in$ acestei perpendiculare

$$\left.\begin{array}{c} OM\perp OA \\ OM\perp OB \\ OM\perp OC \\ \|OA\| = \|OB\| = \|OC\| \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OMA \equiv \triangle OMB \equiv \triangle OMC \Rightarrow \|AM\| = \|BM\| =$$

$= \|CM\|$, deci M are proprietate din enunţ.

23) Se dau planul α şi punctele $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. O dreaptă variabilă d trece prin A şi este conţinută în planul α. Să se afle locul geometric al picioarelor $\perp$ din B pe d.

Soluţie:



Ducem $\perp$ din B pe plan. Fie O piciorul acestei perpendiculare.

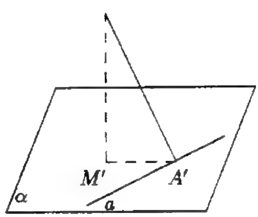
$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie } BM\perp d\\ BO\perp\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow MO\perp d \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(\widehat{OMA}) = 90° \Rightarrow M \in$ cercului de diametrul OA. Reciproc, fie $M \in$ acestui cerc $\Rightarrow$ $\Rightarrow OM\perp AM$, $BO\perp\alpha \Rightarrow BM\perp AM \Rightarrow BM\perp d$, deci M reprezintă piciorul din B pe AM.

24) Se dau: dreapta a, punctul $A \notin a$. Se cere locul geometric al picioarelor perpendicularelor din A pe planele care trec prin a.

Soluţie:

Fie α un plan care trece prin a si fie M piciorul $\perp$ din A pe $\alpha \Rightarrow AM\perp\alpha$.



$$\left.\begin{array}{r}\text{Din } AM\perp\alpha\\ AA'\perp a\end{array}\right\} \Rightarrow MA'\perp a, \text{ deci } M \in \text{ unei perpendic-}$$

ular pe a în A', deci aparţine planului perpendicular pe a in A' pe care-l notîm cu π şi care-l conţine şi pe A. $AM\perp\alpha \Rightarrow AM\perp MA' \Rightarrow M \in$ cercului de diametru AA' din planul π.

* Reciproc, fie M un punct de pe acest cerc de diametru AA' din planul π.

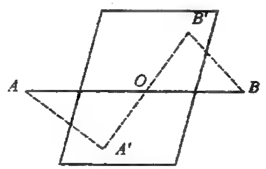
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} MA'\perp a\\ AA'\perp a\\ AM\perp MA'\end{array}\right\} \Rightarrow AM\perp(M,a) \Rightarrow M \text{ este piciorul unei } \perp \text{ duse din } A \text{ pe un plan ce trece}$$

prin a.

25) Se consideră un plan α cere trece prin mijlocul unui segment $[AB]$. Să se arate că

punctele A şi B sînt egal depărtate de planul α.

Soluţie:



Fie A' şi B' picioarele perpendicularelor din A şi B pe α

$$\left.\begin{array}{l} AA' \perp \alpha \\ BB' \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists)$ un plan $\beta = (AA', BB')$ şi $AB \subset \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} O \in \beta \\ O \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow O \in \alpha \cap \beta = A'B' \Rightarrow O,\ A',\ B'$$

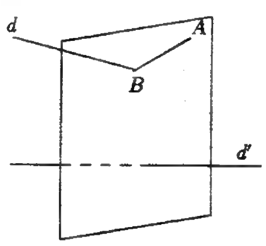
sînt colineare.

În planul β avem

$$\left.\begin{array}{l} \|OA\| = \|OB\| \\ \widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOB'} \\ \triangle \text{ dreptunghic} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOA' \equiv BOB' \Rightarrow \|AA'\| = \|BB'\|$$

26) Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă care să intersecteze o dreaptă dată şi să fie $\perp$ pe o altă dreapta dată.

Soluţie:



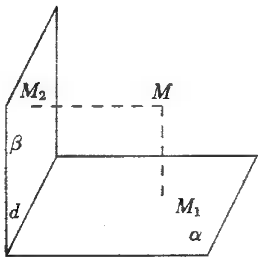
Fie d, d' dreptele date, A punctul dat. Ducem prin A planul $\alpha \perp$ pe d'.

Dacă $a \cap \alpha = \{B\}$, atunci dreapta AB este cea căutată căci trece prin A, întîlneşte pe d şi din $d' \perp \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow d' \perp AB$. Dacă $d \cap \alpha = \emptyset$ nu sînt soluţii.

Dacă $d \subset \alpha$, atunci orice dreaptă determinată de A şi un punct al lui d reprezintă soluţie a problemei, deci o infinitate de soluţii.

27) Fie α şi β două plane distincte, a căror intersecţie este dreapta d şi fie M un punct nesituat în $\alpha \cup \beta$. Se duc dreptele MM_1 şi $MM_2 \perp$ respectiv pe α şi β. Să se arate că dreapta d este $\perp$ pe (MM_1M_2).

Soluţie :

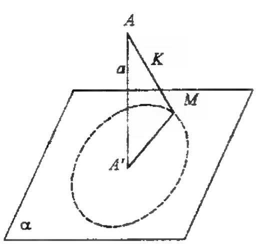


$$\alpha \cap \beta = d \Rightarrow \begin{matrix} d \subset \alpha \\ d \subset \beta \end{matrix}.$$

$$\left.\begin{matrix} MM_1 \perp \alpha \Rightarrow MM_1 \perp d \\ MM_2 \perp \beta \Rightarrow MM_2 \perp d \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp (MM_1M_2)$$

28) Se dau un plan α şi un punct A, $A \notin \alpha$. Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ astfel că segmentul $|AM|$ să aibă a lungime dată.

Soluţie:



Fie M un pucnt a.î. $\|AM\| = k$.

Ducem $AA' \perp \alpha \Rightarrow A'$ punct fix şi $AA' \perp A'M$

Notăm $\|AA'\| = a$.

$$\text{Atunci} \quad \left.\begin{matrix} \|AM\| = \sqrt{k^2 - a^2} = ct \\ A^2 - \text{ fix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$M \in$ unui cerc cu centrul în A' şi de rază $\sqrt{k^2 - a^2}$, pentru $k > a$.

Pentru $k = a$ obţinem 1 punct.

Pentru $k < a$ mulţime vidă.

Reciproc, fie M un punct pe acest cerc $\Rightarrow \left.\begin{matrix} \|A'M\| = \sqrt{k^2 - a^2} \\ \|AA'\| = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \|AM\| =$

$= \sqrt{k^2 - a^2 + a^2} = k$ deci M are proprietatea din enunţ.

29) Fie O, A, B, C patru puncte a.î. $OA \perp OB \perp OC \perp DA$ şi se notează $a = \|OA\|$, $b = \|OB\|$, $c = \|OC\|$.

1) Să se calculeze lungimile laturilor ΔABC în funcţie de a, b, c.

2) Să se calculeza $\sigma[ABC]$ şi să se demonstreze relaţia $\sigma[ABC]^2 = \sigma[DAB]^2 + \sigma[OBC]^2 + \sigma[OCA]^2$.

3) Să se arate că proiecţia ortogonală a punctului O pe planul (ABC) este ortocentrul

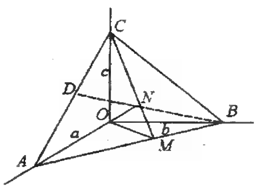
H al $\triangle ABC$.

4) Să se calculeze distanţa $\|OH\|$.

Soluţie:

1) $\|AB\| = \sqrt{a^2+b^2}$; $\|BC\| = \sqrt{b^2+c^2}$, $\|CA\| = \sqrt{a^2+c^2}$

2) Ducem $\left.\begin{array}{r} OM\perp AB \\ CO\perp(OAB) \end{array}\right\} \Rightarrow CM\perp AB$



În $\triangle OCM$

$$\|CM\| = \sqrt{c^2 + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{c^2a^2+c^2b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

$$\sigma[ABC] = \frac{\|AB\|\cdot\|CM\|}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{a^2c^2+c^2b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2[ABC] = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4}.$$

Dar $\sigma[OAB] = \dfrac{ab}{2}$

$\alpha[BOC] = \dfrac{bc}{2}$; $\sigma[COA] = \dfrac{ac}{2}$

Deci $\sigma^2[ABC] = \dfrac{a^2b^2}{4} + \dfrac{a^2c^2}{4} + \dfrac{b^2c^2}{4} = \sigma^2[AOB] + \sigma^2[DOC] + \sigma^2[COA]$.

3) Fie H proiecţia lui O pcl. planul ABC, deci $OH\perp(ABC) \Rightarrow OH\perp AC$

$\left.\begin{array}{r} OC\perp DA \\ OC\perp OB \end{array}\right\} \Rightarrow OC\perp(OAB) \Rightarrow\Rightarrow OC\perp AB$ $\quad\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow AB\perp(OHC) \Rightarrow AB\perp CH \Rightarrow H \in$ înălţimi corespunzîtoare laturii AB .

La fel se arată că $AC\perp BH$ şi deci H este punctul de intersecţie al înălţimilor, deci ortocentrul.

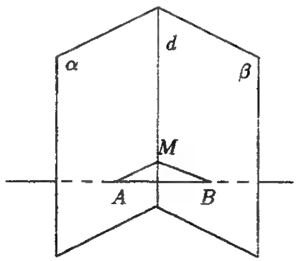
4) $\|OH\|\cdot\|CM\| = \|OC\|\cdot\|OM\| \Rightarrow OH\cdot\sqrt{\dfrac{a^2c^2+c^2b^2+b^2a^2}{a^2+b^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|OH\| = \frac{\dfrac{cab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{\sqrt{a^2c^2+c^2b^2+b^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$

30) Se consideră punctele necoplanare A, B, C D şi dreptele AA', BB', CC', DD' perpendiculare respectiv pe (BCD), (ACD). (ABD). Să se arate că dacă dreptele AA' şi BB'

sînt concurente, atunci dreptele CC', DD' sînt coplanare.

Soluţie :



Arătăm întîi că dacă o dreaptă este $\perp$ pe două plane concurente $\Rightarrow$ planele coincid.

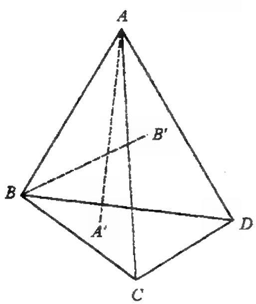
$$\left.\begin{array}{r} a\perp\alpha \\ a\perp\beta \\ \alpha\cap\beta=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta.$$

Fie $A=a\cap\alpha$, $B=a\cap\beta$, $M\in d$.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha\Rightarrow a\perp AM \\ a\perp\beta\Rightarrow a\perp BM \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABM \text{ are 2 unghiuri drepte.}$$

Fals.

Revenim la problema dată.



$$\left.\begin{array}{l} AA'\perp(BCD)\Rightarrow AA'\perp CD \\ BB'\perp(ACD)\Rightarrow BB'\perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow CD\perp(AA',BB')$$

care fiind concurente determină un plan $\Rightarrow CD\perp AB$.

$CC'\perp(ABD)\Rightarrow CC'\perp AB$

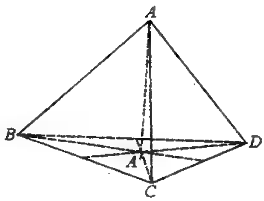
$DD'\perp(ABC)\Rightarrow DD'\perp AB$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB\perp CD \\ AB\perp DD' \end{array}\right\} \Rightarrow AB\perp(CDD') \\ \qquad\qquad (CDC')\cap(CDD')=CD \\ \left.\begin{array}{l} AB\perp CD \\ AB\perp CC' \end{array}\right\} \Rightarrow AB'\perp(CDC') \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{pr. de la început}}$$

$\Rightarrow (CDC')=(CDD')\Rightarrow C,\ D,\ C',\ D'$ sînt coplanare $\Rightarrow CC'$ şi DD' sînt coplanare.

31) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Să se arate că $AB\perp CD$ şi $AC\perp BD \Rightarrow AD\perp BC$.

Soluţie:



Ducem $AA'\perp(BCD)$

$$\left.\begin{array}{l} AA'\perp BC \\ AB\perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow DC\perp(ABA') \Rightarrow DC\perp BA'$$

$\Rightarrow BA'$ înălţime în $\triangle BCD$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} AA'\perp BD \\ AC\perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow BD\perp(AA'C) \Rightarrow BD\perp A'C$$

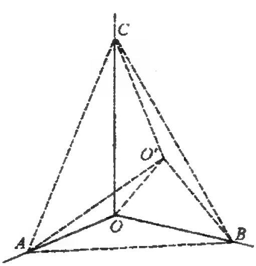
$\Rightarrow A'C$ este înălţime în $\triangle ABC$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow A'$ este ortocentrul $\triangle ABC \Rightarrow OA'\perp BC$

$$\left.\begin{array}{l} DA'\perp BC \\ AA'\perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC\perp(DAA') \Rightarrow BC\perp AD$$

32) Pe muchiile unui unghi cu vîrful O se iau punctele A, B, C, a.î. $|OA| \equiv |OB| \equiv \equiv |OC|$. Să se arate că piciorul $\perp$ din O pe planul (ABC) coincide cu punctul de intersecţie al mediatoarelor $\triangle ABC$.

Soluţie:



$$\left.\begin{array}{r} \text{Fie } OO'\perp(ABC) \Rightarrow OO'\perp AO' \\ OO'\perp BO' \\ OO'\perp CO' \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOO',$$

$\triangle BOO'$ şi $\triangle COO'$ sînt dreptunghice în O'.

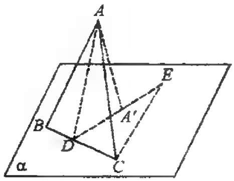
$$\left.\begin{array}{r} \text{Cum } |OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \\ |OO'| \text{ latură comună} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle AOO' \equiv \triangle BOO' \equiv \triangle COO'$

$\Rightarrow \|OA\| = \|BO'\| = \|CO'\| \Rightarrow O'$ este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.

33) Fie vîrful A al triunghiului isoscel ABC ($|AB| \equiv |AC|$) se proiectează ortogonal în A' pe un plan α care trece prin BC. Arătaţi că $\widehat{BA'C} > \widehat{BAC}$.

Soluţie:



Fie D mijlocul lui $[BC]$ şi $E \in |DA'$ a.î.

$\|DE\| = \|DA\|$

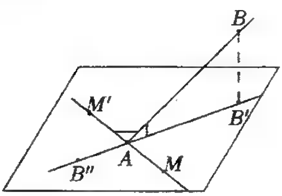
$$\left.\begin{array}{r} AD \text{ mediană în } \triangle \text{ isoscel} \Rightarrow AD \perp BC \\ AA' \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow A'D \perp BC$$

$$\left.\begin{array}{l} |AD| \equiv |DE| \\ |DC| \text{ comună} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADC \equiv \triangle DCE \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{DEC}$$

$\widehat{DA'C} > \widehat{DEC}$ fiind exterior $\triangle CA'E \Rightarrow \widehat{DAC} > \widehat{BAC} \Rightarrow 2\widehat{DA'C} > 2\widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{BA'C} > \widehat{BAC}$.

34) Cu notaţiile teoremei 1, fie $[AB'$ semidreapta opusă lui $[AB''$. Să se arate că pentru orice punct $M \in \alpha - [AB''$ avem $\widehat{B''AB} > \widehat{MAB}$.

Soluţie:



Fie M un punct în plan şi $|AM'$ semidreapta opusă lui AM.

Conform teoremei 1 $\Rightarrow \widehat{B'AB} < \widehat{MAB} \Rightarrow$

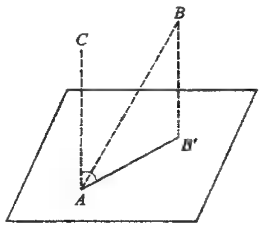
$\Rightarrow m(\widehat{B'AB}) < \widehat{M'AB} \Rightarrow m(\widehat{B'AB}) < m(\widehat{M'AB}) \Rightarrow$

$\Rightarrow -m(\widehat{B'AB}) > -m(\widehat{M'AB}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 180° - m(\widehat{B'AB}) > 180° - m(\widehat{M'AB}) \Rightarrow m(\widehat{B''AB}) > m(\widehat{MAB}) \Rightarrow \widehat{B''AB} > \widehat{MAB}$.

35) Fie α un plan, $A \in \alpha$ şi B şi C două puncte de aceaşi parte a lui α a.î. $AC \perp \alpha$. Arătaţi că $\widehat{CAB}$ este complement al unghiului format de $[AB$ cu α.

Soluţie:



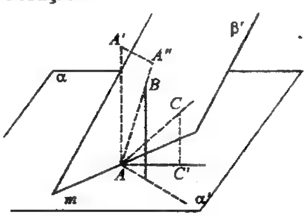
$$\left.\begin{array}{r}\text{Proiectăm } B \text{ pe plan} \Rightarrow BB'\perp\alpha \\ AC\perp\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AC$ şi BB' determină un plan $\beta = (AC, BB') \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \subset \beta$ şi în acest plan $M(\widehat{CAB}) = 90° -$
$-m(\widehat{BAB'})$

36) Fie α' β' un unghi triedru cu muchia m şi $A \in m$. Să se arate că dintre toate semidreptele cu originea A şi conţinute în semiplanul β', aceea formează unghiul cel mai mare posibil cu planul α, care este $\perp$ $p \in m$(suportul ei se numeşte dreapta de cea mai mare pantă a lui β faţă de a).

Soluţie:



Fie semidreapta $|AB \subset \beta'$ a.î. $AB\perp m$. Fie $|AC$ o altă semidreaptă a.î. $|AC \subset \beta'$. Ducem $BB'\perp\alpha$ şi $CC'\perp\alpha$ pentru a obţine unghiul celor 2 semidrepte cu α şi anume $\widehat{BAB'} > \widehat{CAC'}$. Ducem semidreapta $|AA'$ a.î. $AA'\perp\alpha$ şi să se afle de aceiaşi parte a planului α ca şi semiplanul β'.

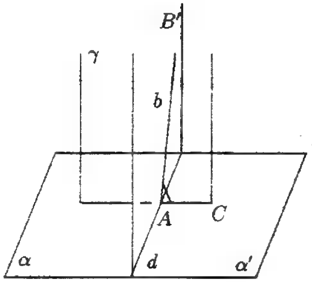
$$\left.\begin{array}{r} AA'\perp\alpha \;\Rightarrow\; AA'\perp m \\ AB\perp m \\ A'A''\perp AB \end{array}\right\} \Longrightarrow \; A'A''\perp\beta' \Rightarrow [AB \text{ este proiecţia semidreptei } [AA' \text{ pe planul}$$

$\beta \overset{t.1}{\Longrightarrow} \widehat{A'AB} < \widehat{A,AC} \Rightarrow m(\widehat{A'AB}) < m(\widehat{A'AC}) \Rightarrow -m(\widehat{A'AB}) > -m(\widehat{A'AC}) \Rightarrow 90° -$
$-m(\widehat{A'AB}) > 90° - m(\widehat{A'AC}) \Rightarrow \widehat{BAB'} > \widehat{CAC'}$

37) Fie α un plan, σ un semispaţiu închis, limitat de α, α' un semiplan conţinut în α şi a un număr real, cuprins între 0° şi 180°. Să se arate că există un singur semiplan β' avînd

frontiera comună cu α' a.î. $\beta' \subset \sigma$ şi $m(\alpha'\beta') = a$.

Soluţie:



Fie d frontiera lui α' şi $A \in d$. Ducem un plan $\perp$ pe d în A pe care-l notăm cu γ

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \cap c = c \\ d\perp\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow d\perp c$$

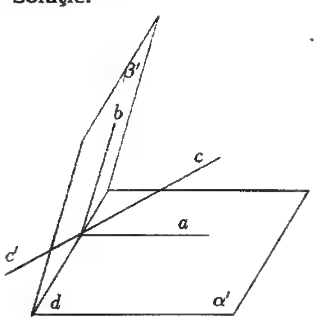
În acest plan există o singură semidreaptă b, cu oiginea în A, a.î. $m(\widehat{c,b}) = a$.

Semiplanul determinat de d şi semidreapta b este cel căutat, căci

$$\left.\begin{array}{r} \text{din } d\perp\gamma \Rightarrow d\perp b \\ d\perp c \end{array}\right\} \Rightarrow m(\alpha'\beta') = m(\widehat{b,c}) = a.$$

38) Fie $(\widehat{\alpha'\beta'})$ un unghi diedru propriu. Construiţi un semiplan γ' a.î. $m(\widehat{\alpha'\beta'}) = m(\gamma'\beta')$. Arătaţi că problema are două soluţii dintre care una este situată în int.$\widehat{\alpha'\beta'}$ (numit semiplan bisector al lui $\widehat{\alpha'\beta'}$).

Soluţie:



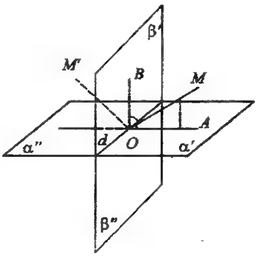
Fie d muchia diedrului şi $A \in d$. Ducem $a\perp d$, $a \subset \alpha'$ şi $b\perp d$, $b \subset \beta'$ două semidrepte cu originea în A. Rezultă $d\perp(ab)$. Ducem în planul (a, b) semidreapta c a.î. $m(\widehat{ac}) = m(\widehat{cb})$ (1)

Cum $d\perp(ab) \Rightarrow d\perp c$

Semiplanul $\gamma' = (d, c)$ cel căutat căci $\left.\begin{array}{r} m(\widehat{\alpha'\gamma'}) = m(\widehat{a,c}) \\ m(\widehat{\gamma'\beta'}) = m(\widehat{c,b}) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha'\gamma') = m(\gamma'\beta')$. Dacă vom considera semidreapta opusă lui c, c', semiplanul $\gamma'' = (d, c')$ formează de asemeni unghiuri concurente cu cele două semiplane, fiind suplementele celorlalte.

39) Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de doua plane secante α, β este format din două plane $\perp$, şi anume din reuniunea planelor bisectoare ale unghiurilor diedre de α şi β.

Soluţie:



Fie M un punct din spaţiu egal depărtat de semiplanele $\alpha', \beta' \Rightarrow \|MA\| = \|MB\|$

$$\left.\begin{array}{l} MA\perp\alpha \Rightarrow MA\perp d \\ MB\perp\beta \Rightarrow MB\perp d \end{array}\right\} \Rightarrow d\perp(MAB),$$

unde $d = \alpha \cap \beta$.

Fie $d\cap(MAB) = \{O\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d\perp OA \\ d\perp OB \end{array}\right\} \Rightarrow m(\alpha'\beta') =$

$= m(\widehat{AOB})$.

$$\left.\begin{array}{l} |MA| = |MB| \\ |OM| \text{ latura comună} \\ \quad \text{triunghi drept.} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MOA \equiv \triangle MOB \Rightarrow \widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB} \Rightarrow M \in \text{bisectoarei unghiului}$$

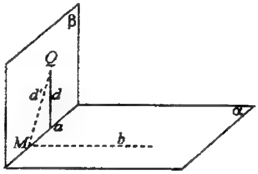
$\widehat{ADB} \Rightarrow M \in$ semiplanului bisector al unghiului semiplanelor α', β'.

Dacă M' este egal depărtat de semiplanele β' şi α'' se va arăta la fel ca $M' \in$ semiplanul bisector al acestor semiplane. Presupunem că M şi M' se află în acest plan $\perp$ pe d, observăm că $m(\widehat{MOM'}) = 90°$, deci cele două semiplane sînt $\perp$. Considerînd şi celelalte 2 unghiuri diedre se obţin 2 plane perpendiculare, cele 2 plane bisectoare.

Reciproc: se arată uşor că un punct din aceste plane este egal depărtat de planele α şi β.

40) Dacă α şi β sînt 2 plane $\perp$, $Q \in \beta$ şi $d\perp$ prin Q pe α. Să se arate că $d \subset \beta$.

Soluţie:



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ Q \in \beta \\ d \perp \alpha \\ Q \in d \end{array}\right\} \Rightarrow d \subset \beta.$$

Fie $\alpha \cap \beta = a$. În planul β ducem $d' \perp a$, $Q \in d'$.

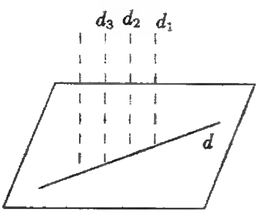
$$\left.\begin{array}{r} \text{Cum } \alpha \perp \beta \Rightarrow m(\widehat{d'b}) = 90^\circ \Rightarrow d' \perp b \\ d' \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} d' \perp \alpha \\ \text{dar } d \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d = d' \text{ pentru ca dintr-un punct}$$

să se poată duce pe un plan o singură perpendiculară.

Cum $d' \subset \beta \Rightarrow d \subset \beta$.

41) Se consideră o dreaptă $d \subset \alpha$. Arătaţi că reuniunea dreptelor $\perp$ pe α, care intersectează dreapta d, este un plan $\perp \alpha$.

Soluţie:

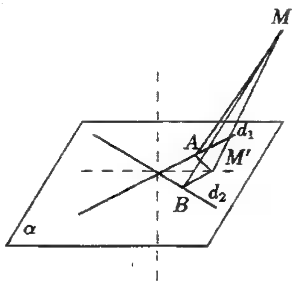


$$\text{Fie } \left.\begin{array}{r} d_1 \perp \alpha \\ d_2 \perp \alpha \\ d_3 \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \text{dreapta cu aceiaşi}$$

direcţie. Se ştie că reuniunea dreptelor care au aceiaşi direcţie şi se sprigină pe o dreaptă dată este un plan. Cum acest plan conţine o perpendiculară pe α, el este perpendicular pe α.

42) Să se afle locul geometric al punctelor situate la egală distanţă de două drepte concurente.

Soluţie:

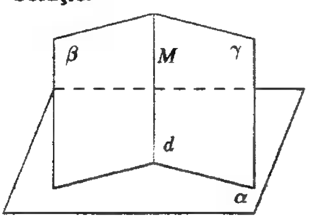


Fie $\alpha = (d_1, d_2)$ planul celor două drepte concurente şi M un punct cu proprietatea că $d(M, d_1) = d(M, d_2)$. Ducem $MA \perp d_1$, $MB \perp d_2$ $\Rightarrow$ $\|MA\| = \|MB\|$. Fie $M' = \text{pr}_\alpha M \Rightarrow \triangle MAM' \equiv \triangle MBM' \Rightarrow \|M'A\| = \|M'B\| \Rightarrow M' \in$ unei bisectoare a unghiului format de cele două drepte, iar M aflîndu-se pe o dreaptă $\perp \alpha$ ce întîlneşte o bisectoare $\overset{pr.5}{\Longrightarrow}$ $M \in$ unui plan $\perp \alpha$ şi care intersectează pe α după o bisectoare. Deci locul geometric va fi format din două plane $\perp \alpha$ şi care intersectează pe α după cele 2 bisectoare ale unghiului formate de d_1 şi d_2. Cele două plane sînt şi $\perp$ între ele.

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \|M'A\| = \|M'B\| \\ \|MM'\| \text{ lat. com.} \end{array}\right\} \Rightarrow MA \perp d_1 \text{ şi la fel } MB \perp d_2 \Rightarrow M \text{ are proprietatea din enunţ.}$$

43) Arătaţi că un plan $\alpha \perp$ pe 2 plane secante este $\perp$ pe intersecţia lor.

Soluţie:

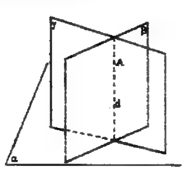


Fie $\beta \cap \gamma = d$ şi $M \in d \Rightarrow M \in \beta,\ M \in \gamma$. Ducem $\perp$ din M pe α, dreapta d'.

$$\text{Conform problemei 4} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} d' \subset \beta \\ d' \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp \alpha.$$

44) Fie A un punct nesituat în planul α. Să se afle intersecţia tutorr planelor care conţin punctul A şi sînt $\perp$ pe planul α.

Soluţie:



Fie β şi γ astfel de plane, adică $\begin{array}{l} A \in \beta,\ \beta \perp \alpha \\ A \in \gamma,\ \gamma \perp \alpha \end{array}$

$\left.\begin{array}{r} \text{Din} A \in \beta \\ A \in \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma \neq \emptyset \Rightarrow$ sînt plane secante şi $\perp$ pe $\alpha \overset{pr.7}{\Longrightarrow} \alpha \perp (\beta \cap \gamma) = d$, $A \in d$. Deci intersecţia lor este $\perp$ prin A pe planul α.

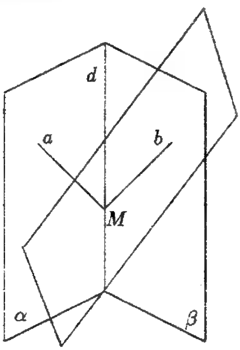
45) Duceţi printr-un punct dat un plan $\perp$ pe 2 plane date.

Soluţie:

Se proiectează punctul pe cele 2 plane şi planul căutat este determinat de cele două perpendiculare.

46) Intersectaţi un inghi diedru cu un plan a.î. unghiul de secţiuni să fie drept.

Soluţie:

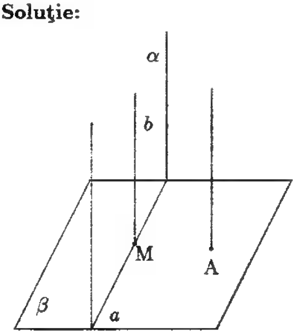


Fie $\alpha \bigcap \beta = d$ şi $M \in d$. Considerăm a semidreaptă cu originea în M, $a \in \alpha$ şi construim un plan $\perp$ pe a în M, planul γ.

Întrucît $\left.\begin{matrix} M \in \beta \\ M \in \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta \bigcap \gamma \neq \emptyset$ şi fie o semidreapta cu originea în M, $b \subset \beta \bigcap \gamma \Rightarrow b \subset \beta$, $b \subset \gamma$. Cum $a \perp \gamma \Rightarrow a \perp b$ şi planul căutat este cel determinat de semidreptele (a, b).

47) Arătaţi că o dreaptă d şi un plan α, perpendiculare pe un alt plan sînt paralele între ele sau dreapta d este conţinută în α.

Soluţie:



Fie $\alpha \bigcap \beta = a$ şi $d \bigcap \beta = \{A\}$.

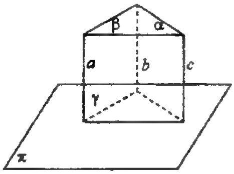
Presupunem că $A \notin a$. Fie $M \in a$, construim $b \perp \beta$, $M \in b \Rightarrow b \subset \alpha$.

$b \perp \beta$, $d \perp \beta \Rightarrow d \parallel b \Rightarrow d \parallel \alpha$.

$\left.\begin{matrix} \text{Dacă } A \in a \\ d \perp \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \subset \alpha$.

48) Dacă 3 plane $\perp$ pe un plan se intersectează două cîte două după dreptele a, b, c arătaţi că $a \parallel b \parallel c$.

Soluţie:



$\alpha \cap \gamma = b$

$\alpha \cap \beta = c$

$\gamma \cap \beta = a$

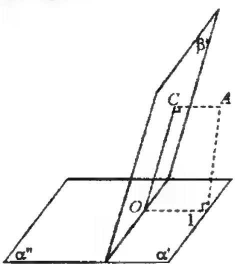
$$\left.\begin{array}{l}\pi \perp \alpha\\ \pi \perp \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \pi \perp c \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi \perp \alpha\\ \pi \perp \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \pi \perp b \qquad (2) \qquad \left.\begin{array}{l}\pi \perp \beta\\ \pi \perp \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \pi \perp a \qquad (3)$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow a \parallel b \parallel c$.

49) Dintr-un punct A se duc perpendicularele AB şi AC pe planele feţelor unui unghi diedru $\widehat{\alpha'\beta'}$. Să se arate că $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{\alpha'\beta'})$ sau $m(\widehat{BAC}) = 180° - m(\widehat{\alpha'\beta'})$.

Soluţie:



Fie $A \in \text{int}(\widehat{\alpha'\beta'}), \alpha \cap \beta = d$

$$\left.\begin{array}{l}AB \perp \alpha \Rightarrow AB \perp d\\ AC \perp \beta \Rightarrow AC \perp d\end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}d \cap (ABC) = \{O\}\\ d \perp OC\\ d \perp OB\end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{\alpha'\beta'}) = m(\widehat{BOC}).$$

$$\left.\begin{array}{l}m(\widehat{ABO}) = 90°\\ m(\widehat{ACO}) = 90°\end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{\alpha'\beta'}) = 180°.$$

$$\Rightarrow m(\widehat{\alpha'\beta'}) = 180° - m(\widehat{BAC}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180° - m(\widehat{\alpha'\beta'})$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie } A \in \text{ int } \widehat{\alpha''\beta'}. \text{ Se arată la fel că } m(\widehat{BAC}) = 180° - m(\widehat{\alpha''\beta'})\\ m(\widehat{\alpha''\beta'}) = 180° - m(\widehat{\alpha'\beta'})\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180° - 180° + m(\widehat{\alpha'\beta'}) = m(\widehat{\alpha'\beta'})$.

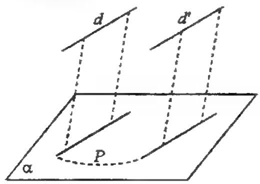
Dacă $A \in \text{int}(\widehat{\alpha''\beta''}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180° - m(\widehat{\alpha'\beta'})$.

Dacă $A \in \text{int}(\widehat{\alpha'\beta''}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{\alpha'\beta'})$.

PROIECŢII

1) Să se arate: dacă dreptele d şi d' sî]nt paralele, atunci $pr_\alpha d \parallel pr_\alpha d'$ sau $pr_\alpha d = pr_\alpha d'$. Ce putem spune despre planele proiectante ale lui d şi d'.

Soluţie:



Fie $d \parallel d'$, β planul proiectantal lui d.

a) Presupunem $d' \not\subset \beta$, adică planul $d, d' \not\perp \alpha \Rightarrow$ planul proiectant al lui d' este atunci β'. Vrem să arătăm că $pr_\alpha d \parallel pr_\alpha d'$. Presupunem prin observaţii că $pr_\alpha d \cap pr_\alpha d' = \{P\} \Rightarrow (\exists) M \in d$ a.î. $pr_\alpha M = P$ şi $(\exists) M' \in d'$ a.î. $pr_\alpha M' = P$.

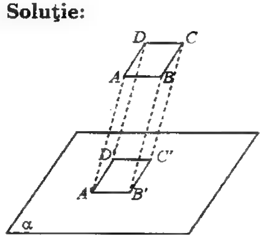
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} PM \perp \alpha \\ PM' \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \text{în punctul } P \text{ pe planul } \alpha \text{ se pot duce 2 perpendiculare distincte. Fals.}$$

Dacă β este planul proiectant a lui d şi β al lui d', atunci $\beta \parallel \beta'$, căci dacă ar avea un punct comun proiecţiile lor ar trebui să aparţină şi $pr_\alpha d$ şi $pr_\alpha d'$ şi deci n-ar mai fi paralele.

b) Dacă $d' \subset \beta$ sau $d \subset \beta'$, adică $(d, d') \perp \alpha \Rightarrow d$ şi d' au acelaşi plan proiectant $\Rightarrow pr_\alpha d = pr_\alpha d'$.

2) Arătaţi că proiecţia unui paralelogram pe un plan este un paralelogram sau un segment.

Soluţie:



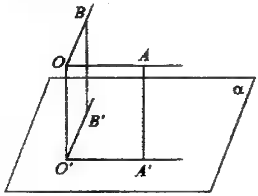
a) Pesupunem că $(ABCD) \not\perp \alpha$. Fie A', B', C', D' respectiv proiecţiile punctelor A, B, C, D.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \overset{pr.1}{\Longrightarrow} A'B' \parallel D'C' \\ AD \parallel BC \Longrightarrow A'D' \parallel B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow A'B'C'D' \text{ paralelogram.}$$

b) Dacă $(ABCD) \perp \alpha \Rightarrow$ proiecţiile A', B', C', $D \in$ dreptei $(ABCD) \cap \alpha \Rightarrow$ proiecţia paralelogramului este un segment.

3) Ştiind că latura $[OA$ a unghiului drept AOB este paralelă cu un plan α, să se arate că proiecţa pe planul α a unghiului $\widehat{AOB}$ este un unghi drept.

Soluţie:



Dacă $OA \parallel \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha OA \parallel OA \Rightarrow O'A' \parallel OA$ întrucît $(\forall)$ plan ca trece prin OA taie planul α după o paralelă la OA.

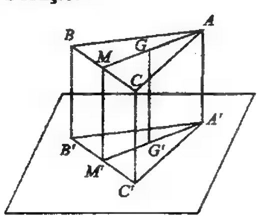
$$\left.\begin{array}{l} OO'\perp O'A' \\ O'A' \parallel OA \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} OA\perp OO' \\ OA\perp OB \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} OA\perp(OO'B) \\ O'A' \parallel OA \end{array}\right\} \Rightarrow O'A'\perp(OO'B) \Rightarrow$$

$\Rightarrow O'A'\perp O'B' \Rightarrow \widehat{A'O'B'}$ unghi drept.

4) Fie $A'B'C'$ proiecţia $\triangle ABC$ pe un plan α. Arătaţi că centrul de greutate al $\triangle ABC$ se proiectează în centrul de greutate al $\triangle A'B'C'$. Este valabil un rezultat analog pentru ortocentru?

Soluţie:



În trapezul $BCC'B'$ $(BB' \parallel CC')$

$$\left.\begin{array}{l} |BM| \equiv |MC| \\ MM' \parallel BB' \end{array}\right\} \Rightarrow |B'M'| \equiv |MC'| \Rightarrow A'M' \text{ me-}$$

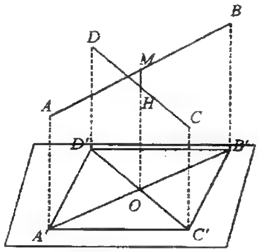
diană.

$$\left.\begin{array}{l} MM' \parallel AA' \Rightarrow MM'A'A \text{ trapez} \\ \dfrac{\|AG\|}{\|GM\|} = 2,\ GG' \parallel AA' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\|A'G\|}{\|G'M'\|} = \dfrac{\|AG\|}{\|GM\|} = 2 \Rightarrow G'$ se află pe mediana $A'M'$ la $2/3$ de vîrf şi $1/3$ de bază. În general <u>nu</u>, căci ar trebui că $\measuredangle$ drept AMC să se proiecteze tot după un unghi drept şi la fel pentru încă o înălţime. Acest lucru se realizează dacă laturile $\triangle$ sînt paralele cu planul.

5) Fiind date punctele necoplanare A, B, C, D să se determine un plan pe care punctele A, B, C, D se proiectează în vîrfurile un paralelogram.

Soluţie:



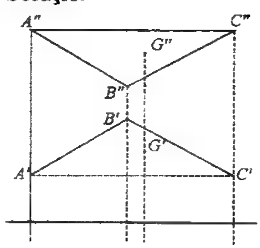
Fie A, B, C, D cele 4 puncte necoplanare şi M, N mijloacele segmentelor $|AB|$ şi $|CD|$. M şi N determină o dreaptă şi fie un plan $\alpha \perp MN \Rightarrow M$ şi N se proiectează în acelaşi punct O pe α.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c} AA' \parallel MO \parallel BB'. \\ |AM| \equiv |MB| \end{array}\right\} \Rightarrow |A'O| \equiv |OB'| \\ \left.\begin{array}{c} CC' \parallel DD' \parallel NO \\ |DN| \equiv |NC| \end{array}\right\} \Rightarrow |D'O| \equiv |OC'| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $A'B'C'D'$ paralelogram.

6) Se consideră toate triunghiurile din spaţiu care se proiectează pe un plan α după acelaşi triunghi. Să se afle locul geometric al centrului de greutate.

Soluţie:



Fie $A'B'C'$, $A''B''C''$ două astfel de $\triangle$, cu proprietatea $\mathrm{pr}_\alpha A'B'C' = ABC$, $\mathrm{pr}_\alpha A''B''C'' = ABC$.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{pr}_\alpha G' = G \Rightarrow G'G \perp \alpha \\ \mathrm{pr}_\alpha G'' = G \Rightarrow G''G \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

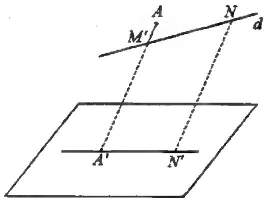
$\Rightarrow G'G = G''G \Rightarrow G''$, G', G sunt colineare.

Datorită faptului că prin proiecţie se păstrează raportul se arată că G' este de greutate al lui A, B, C.

$$\frac{\|BG\|}{\|GM\|} = \frac{\|B_1G\|}{\|G_1M_1} = 2.$$

7) Fie A un punct nesituat pe dreapta d. Determinaţi un plan α a.î. $\mathrm{pr}_\alpha d$ să treacă prin $\mathrm{pr}_\alpha A$.

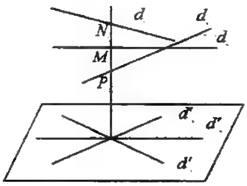
Soluţie:



Fie $M \in d$ şi $A \notin d$. Cele două puncte eterminǎ o dreaptă şi fie α un plan perpendicular pe această dreaptă, $AM \perp \alpha \Rightarrow A$ şi M se proiectează pe α în acelaşi punct A' prin care trece şi $\mathrm{pr}_\alpha d = \mathrm{pr}_\alpha A \in \mathrm{pr}_\alpha d$.

8) Determinaţi un plan pe care trei drepte date să se proiecteze după drepte concurente.

Soluţie:



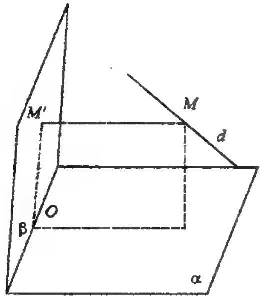
Determinăm o dreaptă care să întîlnească cele 3 drepte în felul următor.

Fie $M \in d_2 \Rightarrow \beta = (M, d_1)$, $\gamma = (M, d_3)$ şi $\beta \bigcap \gamma = $ $= d \Rightarrow d \subset \beta_1$, $d \bigcap d_1 = \{N\}$, $d \subset \gamma_1$, $d \bigcap d_3 = \{P\}$.

Fie acum un plan $\alpha \perp d \Rightarrow \mathrm{pr}_\alpha M = \mathrm{pr}_\alpha N = \mathrm{pr}_\alpha P =$ $= O \Rightarrow \mathrm{pr}_\alpha d_1 \bigcap \mathrm{pr}_\alpha d_2 \bigcap \mathrm{pr}_\alpha d_3 \neq \emptyset \Rightarrow d'_1 \bigcap d'_2 \bigcap d'_3 =$ $= \{O\}$.

9) Fie α, β plane care se taie după o dreaptă a ş fie d o drepată perpendiculară pe a. Să se arate că proiecţiile dreptei d pe α, β sînt concurente.

Soluţie:



Fie $\alpha \cap \beta = a$ şi $M \in d$. Proiectăm acest punct pe α şi β : $MM' \perp \alpha \Rightarrow \left.\begin{array}{r} MM' \perp a \\ d \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (MM', d)$

$MM'' \perp \beta \Rightarrow \left.\begin{array}{r} MM'' \perp a \\ d \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (MM'', d) \Rightarrow a \perp$ pe planul proiectant al lui d pe β.

$$\left.\begin{array}{l} (MM', d) \perp d \\ (NM'', d) \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (MM', d) \parallel (MM'', d) \\ d \text{ dr. comună} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

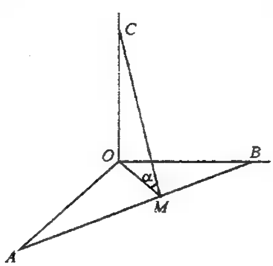
$\Rightarrow (MM', d) = (MM'', d) = (MM'M'')$

Fie $a \cap (MM'M'') = \{O\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \mathrm{pr}_\alpha d = OM' \\ \mathrm{pr}_\alpha d = OM'' \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow OM' \cap OM'' = \{O\}$ şi deci cele două proiecţii sînt concurente.

10) Se cansideră dreptele OA, OB, OC, $\perp$ două cîte două. Ştim că $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = C$. Să se calculeza măsura unghiului planelor (ABC) şi (OAB).

Soluţie:



$$\left.\begin{array}{l} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} OC \perp (OAB) \\ OM \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CM \perp AB \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ unghiul planelor (ABC) şi (OAB) este $\widehat{OMC} = \alpha$.

$\|AB\| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\|OM\| = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\|OC\|}{\|OM\|} = \frac{c}{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.$$

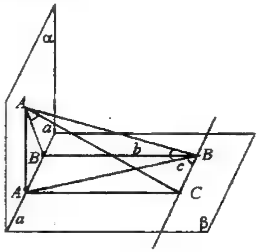
11) O dreaptă taie două plane perpendiculare α şi β în A şi B. Fie A' şi B' proectiile punctelor A şi B pe dreapta $\alpha \cap \beta$.

1) Arătaţi că $\|AB\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'B'\|^2 + \|B'B\|^2$

2) Dacă a, b, c sînt măsurile unghiurilor dreptei AB cu planele α, β şi cu $\alpha \cap \beta$, atunci

$\cos c = \dfrac{\|A'B'\|}{\|AB\|}$ şi $\sin^2 a + \sin^2 b = \sin^2 c$.

Soluţie:



Fie $\alpha \cap \beta = a$ şi $AA' \perp a$, $BB' \perp a$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ A \in \alpha \\ AA' \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \perp \beta \Rightarrow AA' \perp A'B \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|AB\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'B\|^2$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Cum } BB' \perp a \\ \beta \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BB' \perp \alpha \Rightarrow \ \mathrm{pr}_\alpha AB = AB' \Rightarrow \sphericalangle \text{dreptei } AB \text{ cu } \alpha,\ \widehat{BAB'} = a$$

$AA' \perp \beta \Rightarrow \ \mathrm{pr}_\beta AB = A'B \Rightarrow \sphericalangle$dreptei AB cu β este $\widehat{ABA'} = b$.

În planul β ducem prin B o paralelă la a şi prin A' o paralelă la BB'. Intersecţia lor este C, iar $\|A'B'\| = \|BC\|, \|BB'\| = \|A'C\|$. Ungiul dreptei AB cu a este $\widehat{ABC} = c$.

Cum $AA' \perp \beta \Rightarrow AA' \perp A'C \Rightarrow \|AC\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'C\|^2 = \|AA'\|^2 + \|B'B\|^2$ (1)

$$\left.\begin{array}{r} B'BCA \text{ dreptunghi } \Rightarrow A'C \perp \| CB \\ AA' \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp CB.$$

$\Rightarrow \triangle ACB$ dreptunghic în C.

Împărţim relaţia (1) cu $\|AB\|^2$

$$\frac{\|AC\|^2}{\|AB\|^2} = \frac{\|AA'\|^2}{\|AB\|^2} + \frac{\|B'B\|^2}{\|AB\|^2} \Rightarrow \sin^2 c = \sin^2 b + \sin^2 a.$$

12) Fie ABC un triunghi situat într-un plan α, $A'B'C'$ proiecţia $\triangle A'B'C'$ pe planul α. Notînd cu S, S', S'' ariile $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$, să se arate că S' este medie proporţională între S şi S''.

Soluţie:

$$\begin{array}{l} S' = S\cos a \\ S'' = S'\cos a \end{array},\ a \in (\widehat{\alpha,\beta})$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \dfrac{S'}{S} \\ \cos a = \dfrac{S''}{S'}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{S''}{S'} \Rightarrow S'^2 = SS'' \Rightarrow S' = \sqrt{SS''}.$$

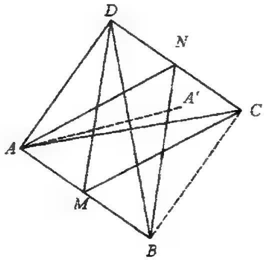
13) Un triedru $[ABCD]$ are $|AC| \equiv |AD| \equiv |BC| \equiv |BD|$. M, N fiind mijloacele muchiilor $[AB], [CD]$ să se arate:

a) $MN \perp AB$, $MN \perp CD$, $AB \perp CD$;

b) Dacă A', B', C', D' sînt picioarele perpendicularelor duse în vîrfurile A, B, C, D pe fețele opuse al tetraedrului, punctele B, A', N sînt colineare şi la fel A, B', N; D, C', M; C, D', M.

c) AA', BB', MN şi CC', DD', MN sînt cîte trei drepte concurente.

Soluţie:



$$\left.\begin{array}{r}|AC| \equiv |BC| \Rightarrow \triangle ACB \text{ isoscel} \\ CM \text{ mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow CM \perp AB \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r}|AD| \equiv |BD| \Rightarrow \triangle ABD \text{ isoscel} \\ DM \text{ mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow DM \perp AB \quad (2)$$

$$\text{Din (1) şi (2)} \Rightarrow AB \perp (DMC) = \left.\begin{array}{l}AB \perp MN \\ AB \perp DC\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}|BC| \equiv |BD| \\ BN \text{ mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow BN \perp DC \\ \left.\begin{array}{l}|AD| \equiv |AC| \\ AN \text{ mediană}\end{array}\right\} \Rightarrow AN \perp DC\end{array}\right\} \Rightarrow DC \perp (ABN) \Rightarrow DC \perp MN$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}DC \perp MN \\ DC \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}DC \perp (ABN) \\ DC \subset (BDC)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(BDC) \perp (ABN) \\ AA' \perp (BDC)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}AA' \subset (ABN) \\ A' \in (BDC)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A' \in BN \Rightarrow B, A', N$ sînt colineare.

La fel:

Din $(ADC)\perp(ABN) \Rightarrow A,\ B',\ N$ colineare

$(ABC)\perp(DMC) \Rightarrow M,\ D',\ C$ colineare

$(ABD)\perp(DMC) \Rightarrow D,\ C',\ M$ colineare

c) La a) am arătat că $MN\perp AB$

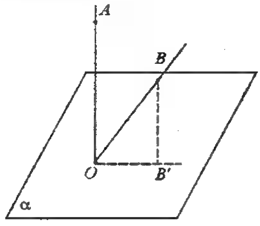
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Din } AA'\perp(BDC)\\ BN\subset(DBC)\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}AA'\perp BN\\ A'\in BN\end{array}\\ \left.\begin{array}{l}\text{Din } BB'\perp(ADC)\\ AN\subset(ADC)\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}BB'\perp AN\\ B'\in AN\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow AA',\ BB' \text{ şi } MN \text{ sînt înălţimi în } \triangle ABN \text{ deci}$$

concurente.

La fel DD', CC', MN vor fi înălţimi în $\triangle DMC$.

14) Dacă semidreptele $[OA$ şi $[OB$ cu originea lor în planul α, $OA\perp\alpha$, $OB \not\perp\alpha$ atunci cele 2 semidrepte formează un unghi ascuţit sau obtuz, după cum sînt sau nu de aceiaşi parte a planului α.

Soluţie:



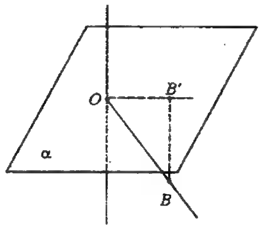
Presupunem că $[OA$, $[OB$ sînt de aceiaşi parte a planului α.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Ducem } BB'\perp\alpha\\ AO\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow BB' \parallel AO \Rightarrow$$

$(\exists)$ planul $(AD,\ BB')=\beta \Rightarrow |OA,\ |OB$ sînt în acelaşi semiplan.

$AO\perp\alpha \Rightarrow AO\perp OB'$, $m(\widehat{BOB'}) < 90° \Rightarrow |OB \subset \text{int } \widehat{AOB'}$.

În planul β avem $m(\widehat{AOB}) = 90° = m(\widehat{BOB'}) < 90° \Rightarrow \widehat{AOB}$ ascuţit.

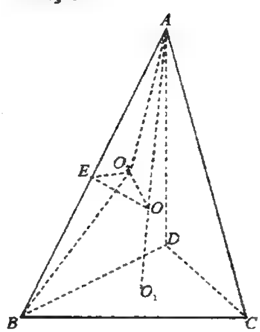


Presupunem că $[OA$ şi $[OB$ sînt în semispaţii diferite faţă de $\alpha \Rightarrow A$ şi B sînt în semiplane diferite faţă de OB' în planul $\beta \Rightarrow [OB' \subset \text{int.}\widehat{BOA}$ $\Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 90° + m(\widehat{BOB'}) > 90° \Rightarrow \widehat{AOB}$ este obtuz.

15) a) Arătaţi că cele 6 plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru au un punct comun.

b) Prin acest punct trec ş perpendiculare pe feţele tetraedrului, duse prin centrele cercurilor acestoe feţe.

Soluţie:



Se ştie că locul geometric al punctelor din spaţiu egal depătate de vîrfurile $\triangle BCD$ este perpendiculara d pe pl. $\triangle$ în centrul cercului circumscris acestui $\triangle$ notat cu O. Ducem planul mediator al laturii $[AC]$ care intersectează aceasta $\perp d$ în punctul O. Punctul O este egal depărtat atunci de toate vîrfurile tetraedrului $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\| = \|OD\|$. Unim O cu mijlocul E al laturii $[AB]$. Din $[OA] \equiv [OB] \Rightarrow \triangle OAB$ isoscel $\Rightarrow OC \perp AB$ (1)

Proiectăm O pe planul (ABD) în punctul O_2.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cum } [OA] \equiv [OB] \equiv [OD] \\ [O)O_2] \text{ latură comună}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OAO_2 = \triangle OBO_2 = \triangle ODO_2$$

$\Rightarrow [O_2A] \equiv [BO_2] \equiv [DO_2] \Rightarrow O_2$ este centrul cercului circumscris $\triangle ABD$. La fel se arată că O se proiectează şi pe celelalte feţe în centrele cercurilor circumscrise, deci prin O trec toate perpendiculare pe feţele tetraedrului duse prin centrele cercurilor circumcscrise. Deci b) este demonstrat.

Din $|O_2A| \equiv |O_2B| \Rightarrow \Delta O_2AB$ isoscel $\Rightarrow O_2E \perp AB$ (2)

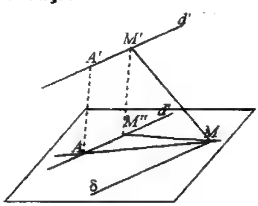
$$\left.\begin{array}{r}\text{Din (1) şi (2) } \Rightarrow AB \perp (EO_2O) \\ |AE| \equiv |EB|\end{array}\right\} \Rightarrow (EO_2O) \text{ este plan mediator al laturii } |AB| \text{ şi trece}$$

prin O, iar dreaptei d îi aparţine intesecţia celor 3 plane mediatoare ale laturilor $|BC|$, $|CD|$, $|BD|$, deci O este punctul comun pentru cele 6 plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru.

16) Fie d şi d' două drepte necoplanare. Să se arate că $(\exists)$ puncte unice $A \in d$, $A' \in d'$ a.î. $AA' \perp d$ şi $AA' \perp d'$.

Dreapta AA' se numeşte perpendiculara comună a dreptelor d şi d'.

Soluţie:



Fie $M \in d$ şi $\delta \parallel d'$, $M \in \delta$. Fie $\alpha = (d, \delta) \Rightarrow d' \parallel \alpha$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fie: } d'' = \mathrm{pr}_\alpha d' \\ d' \parallel, \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow d'' \parallel d' \Rightarrow d'' \parallel d' \Rightarrow d' \cap d =$$

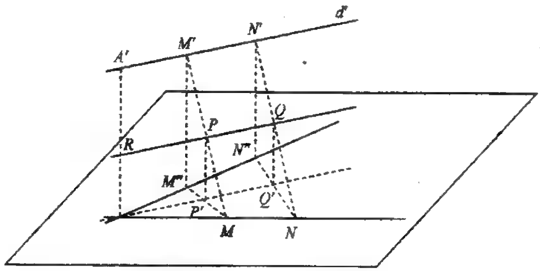
$\{A\}$ altfel d şi d' ar fi paralele deci coplanare. Fie β planul proiectant al dreptei d' $\Rightarrow \begin{array}{l}\beta \perp \alpha \\ \beta \cap \alpha = d''\end{array}$

În planul β construim perpendicular pe d'' în punctul A şi

$$\left.\begin{array}{l}AA' \perp d'' \\ d' \parallel d''\end{array}\right\} \Rightarrow AA' \perp d'.$$

17) Cu notaţiile problemei precedente fie $M \in d$, $M' \in d'$. Să se arate că $\|AA'\| \leq \|MM'\|$, egalitatea fiind posibilă numai dacă $M = A$ şi $M' = A'$.

Soluţie:



Ducem $M'M''\perp d' \Rightarrow M'M''\perp d \Rightarrow M'M''\perp M''M \Rightarrow \|M'M\| \geq \|M'M''\| = \|A'A\|$.

Egalitate se obţine numai cînd $M = A$ şi $M' = A'$.

18) Fie AA' $\perp$ comună a dreptelor necoplanare d, d'' şi $M \in d$, $M' \in d'$ a.î. $|AM| \equiv |A'M'|$. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[MM']$.

Soluţie:

Fie $M \in d$, $M' \in d'$ a.î. $|AM| \equiv |A'M'|$. Fie $d'' =$ $\text{pr}_\alpha d'$ şi $M'M''\perp d'' \Rightarrow M'M''\perp\alpha \Rightarrow$ $M'M''\perp M''M$ şi

$$\left.\begin{array}{l} M'' \parallel A'A \\ A'M' \parallel AM'' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |A'M'| \equiv |AM''| \\ |A'M'| \equiv |AM| \end{array}\right\} \Rightarrow |AM| \equiv |AM'| \Rightarrow \triangle AMM' \text{ isoscel.}$$

Fie P mijlocul lui $|MM'|$ şi $P' =$ $\text{pr}_\alpha P \Rightarrow PP' \parallel M'M'' \Rightarrow P'$ este mijlocul lui MM'', AMM'' isoscel $\Rightarrow$ $[AP'$ besectoarea $\sphericalangle\ \widehat{M'AM}$. (PP') fiind linie mujlocie în $\triangle M'M''M \Rightarrow$ $\|PP'\| = \frac{1}{2}\|M'M'' = \frac{1}{2}\|A'A\|$ =constant.

Deci punctul se află la o distanţă constantă de dreapta AP', deci pe o paralelă la această dreaptă situată în planul $\perp$ pe α ce trece prin AP'.

Cînd $M = A$ ş $M' = A' \Rightarrow \|AM\| = \|N'A' = 0 \Rightarrow P = R$ unde R este mijlocul segmentului $|AA'|$. Deci locul geometric trece prin R şi cum

$$\left.\begin{array}{l} AA'\perp AP' \\ RP \parallel AP' \end{array}\right\} \Rightarrow RP\perp AA' \Rightarrow RP \text{ este conţinută în planul mediator al segmentului } |AA'|.$$

Deci RP este intersecţia planului mediator al segmentului $|AA'|$ cu planul $\perp$ pe α trecînd prin una din bisectoarele unghiurilor determinate de d şi d', se mai obţine încă o dreaptă conţinută în planul mediator al lui $[AA']$ paralela cu cealaltă bisect. a unghiurilor det. de d şi d''.

Deci locul geometric va fi format din două drepte perpendiculare.

* **Reciproc**, fie $Q \in RP$ un punct $(\forall)$ pe această dreaptă şi $Q' = \text{pr}_\alpha Q \Rightarrow Q' \in |AP'$ bisectoare. Ducem $NN'' \perp AQ'$ şi cum AQ' este şi bisectoare şi înălţime $\Rightarrow \triangle ANN''$ isoscel $\Rightarrow |AQ'|$ mediană $\Rightarrow |NQ'| \equiv |Q'N''|$.

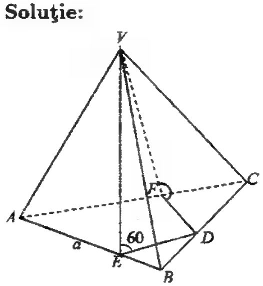
Ducem $N'N'' \perp d'' \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |A'N'| \equiv |AN''| \\ |AN''| \equiv |AN| \end{array}\right\} \Rightarrow |AN| \equiv |A'N'|$

$QQ'' \parallel N'N'' \Rightarrow Q,\ Q',\ N',\ N''$ coplanare $\Rightarrow N''Q' \in (QQ'N'N'') \Rightarrow N \in (QQ'N'N'')$

$\left.\begin{array}{l} \text{Întrucît } \|Q'Q\| = \dfrac{1}{2}\|AA'\| = \dfrac{1}{2}\|N'N''\| \\ QQ' \parallel N'N'' \end{array}\right\} \Rightarrow |Q'Q|$ linie mijlocie în $\triangle NN'N'' \Rightarrow Q,\ N',\ N$ coliniare şi $|QN'| \equiv |QN|$.

19) Se consideră un tetraedru $VABC$ cu următoarele proprietăţi: ABC este un triunghi echilateral de latură a, $(ABC) \perp (VBC)$, iar planele (VAC) şi (VAB) formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură $60°$. Să se calculeze distanţa de la punctul V la planul (ABC).

Soluţie:



$D = \text{pr}_{BC} V$ şi $E = \text{pr}_{AB} V$ $FD = \text{pr}_{AC} V$

$(VBC) \perp (ABC) \Rightarrow VD \perp (ABC) \Rightarrow d(V, \alpha) = \|VD\|$, unde $\alpha = (ABC)$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} VD \perp (ABC) \\ VE \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow DE \perp AB \Rightarrow m(\widehat{VED}) = 60° \\ \left.\begin{array}{l} VD \perp (ABC) \\ VF \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} DF \perp AC \Rightarrow m(\widehat{VFD}) = 60° \\ VD \text{ latură comună} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

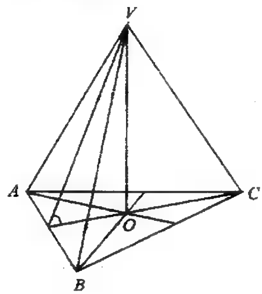
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\Delta VDE = \Delta VDF \Rightarrow |ED| \equiv |FD| \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EDB \equiv \Delta FDC \Rightarrow |BD| \equiv |DC| \Rightarrow \|BD\| = \frac{a}{2}$$

$$\|ED\| = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\|VD\| = \|ED\| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{4}$$

20) Toate muchiile unui triedru au lungimea a. Să se arate că un vîrf se proiectează pe faţa opusă în centrul de greutate al acestuia. Să se afle măsură unghiurilor diedre determinate de cîte două feţe.

Soluţie:



$$\left.\begin{array}{r}\text{Fie } O = \text{ pr}_{(BAC)}V;\ \|VA\| = \|VB\| = \|VC\| = a \\ \|VO\| \text{ comună}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

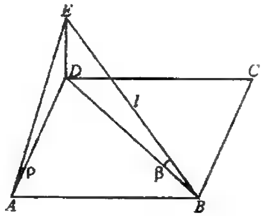
$\Rightarrow \Delta VAO \equiv \Delta VBO \equiv \Delta VBO \equiv \Delta VCO \Rightarrow |OA| \equiv$
$\equiv |BO| \equiv |CO| \Rightarrow O$ este centrul cercului circumscris şi cum ΔABC este echilateral $\Rightarrow O$ este centrului de greutate $\Rightarrow \|OM\| = \frac{1}{3}\|MC\| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\|VM\| = \|MC\| = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{În } \Delta VOM \Rightarrow \cos(V\widehat{M}O) = \frac{\|OM\|}{\|NM\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V\widehat{M}O = \arccos\frac{1}{3}.$$

21) Fie DE o dreaptă perpendiculară pe planul patratului $ABCD$. Ştiind că $\|BE\| = l$ şi măsura unghiului format de $[BE$ şi (ABC) este β, să se determine lungimea segmentului AE şi unghiul lui $[AE$ cu planul (ABC).

Soluţie:



$\|DE\| = l$

$m(DBE) = \beta$

În $\triangle EDB$: $\|DE\| = l\sin\beta$

$\|DB\| = l\cos\beta.$

Dar dacă $\|AB\| = a \Rightarrow \|DB\| = a\sqrt{2}$, deci

$$\|AB\| = \frac{\|DB\|}{\sqrt{2}} = \frac{l\cos\beta}{\sqrt{2}}.$$

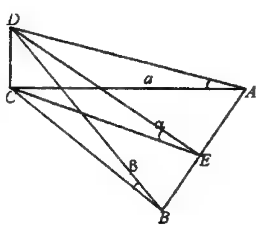
În $\triangle AEB$, dreptungic în A:

$$\|AE\| = \sqrt{l^2 - \frac{l^2\cos^2\beta}{2}} = l\sqrt{\frac{2-\cos^2\beta}{2}} = l\sqrt{\frac{1+\sin^2\beta}{2}}$$

În $\triangle ADE$ $(m(\widehat{D}) = 90°)$ $\qquad \operatorname{tg}\rho = \dfrac{\|DE\|}{\|AD\|} = \dfrac{\rho\sin\beta}{\dfrac{\rho\cos\beta}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\operatorname{tg}\beta.$

22) Dreapta $CD \perp$ planul $\triangle ABC$ echilateral de latură a, iar $[AD$ şi $[BD$ formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură β. Să se găsească unghiul planelor (ABC) şi ABD.

Soluţie:



$$\left.\begin{array}{l} CE \perp BA \\ DE \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle \text{pl. } (ABC) \text{ şi } ABD \text{ are } m(\widehat{DEC}).$$

ABC echilateral $\Rightarrow \|CE\| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Din $\triangle CBD$: $\|DB\| = \dfrac{a}{\cos\beta} = \|AD\|$

$$DE^2 = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\beta} - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \text{ şi}$$

$$\cos\alpha = \frac{\|CO\|}{\|CE\|} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}} = \frac{\sqrt{3}\cos\beta}{2\cdot\sqrt{\sin\beta}}$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\|CD\|}{\|CE\|}=\frac{\frac{a\cdot\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

23) Fiind date planul α şi $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ nesituate în acest plan. Să se determine un $\triangle DEF$, aşezat în α a.î. pe de o parte dreptele AD, BE, CF şi pe de altă parte dreptele $A'D$, $B'E$, $C'F$ să fie concurente.

Soluţie:

Considerăm problema rezolvată şi luăm în planul α, $\triangle DEF$ apoi punctele O şi O' nesituate în α.

Construim şi dreptele $|DO$, $|FO$, $|EO$ respectiv $|DO'$, $|FO'$ $|EO'$. Pe aceste semidrepte luăm $\triangle ABC$ şi $\triangle A'B'C'$. Evident din modul în care am construit dreptele AD, BE, CF se intersectează în O. Prelungim dreptele BA, BC, CA pînă intersectează planul α în punctele B, C, respectiv A. Apoi prelungim dreptele $C'A'$, $C'B'$, $A'B'$ pînă intersectează planul α în punctele A_2, C_2 respectiv B_2.

Evident punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare (pentru că $\in \alpha\cap(ABC)$) de asemenea A_2, B_2, C_2 coliniare (deoarecare $\in \alpha\cap(A'B'C')$).

Pe o altă parte, punctele D, F, A_1, A_2 sînt coliniare deoarece:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\in AC(ACOD)\\ \text{cum } A,D,F\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow O,F,A_1\in\alpha\cap(ACO),\text{ deci coliniare}\qquad(1)$$

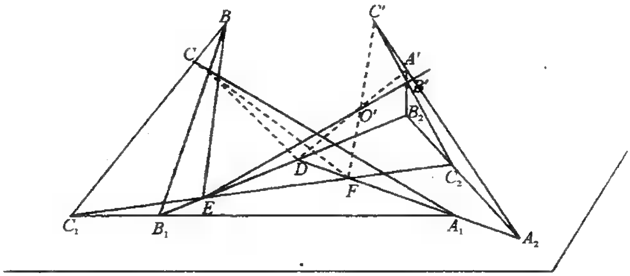
$$A_2\in O'A'\subset(A'C'ODF)$$

$$D,F,A_2\in\alpha$$

$$\Rightarrow D,F,A_2\in\alpha\cap(C'A'O)\Rightarrow D,\ F,\ A_2\text{ coliniare}\qquad(2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow D$, F, A_1, A_2 coliniare. Analog C, E, F, C_2 colineare şi B_1, E, D, D_2 coliniare.

În consecinţă DEF se află la intersecţia dreptelor A_1A_2, C_1C_2, B_1B_2 în planul α, deci unic determinat.

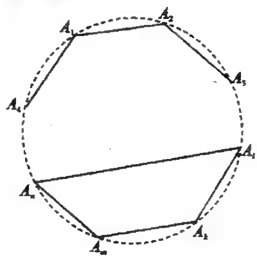

B
C
C'
A'
B'
O'
B2
D
C2
F
E
C1
B1
A1
A2

GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

(clasa a X-a)

1) Să se arate că un poligon convex nu poate avea mai mult de trei unghiuri ascuţite.

Soluţie:

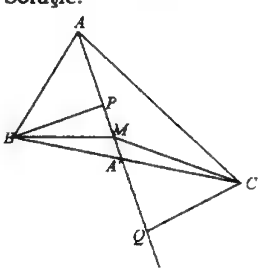


Fie $A_1, A_2, \cdots A_n$ vîrfurile poligonului convex. Să presupunem că are 4 unghiuri ascuţite. Vîrfurile acestor unghiuri formează un patrulater convex $A_lA_kA_mA_n$. Deoarece poligonul este convex, segmentele $|A_lA_k|$, $|A_kA_m|$, $|A_mA_n|$, $|A_nA_l$ se află în interiorul poligonului iniţial. Obţinem că unghiurile patrulaterului sînt ascuţite, ceeace este absurd, deoarece suma lor este 360°.

Soluţia 2. Presupunem că $A_lA_kA_mA_n$ este un poligon convex, cu toate unghiurile ascuţite $\Rightarrow$ suma unghiurilor exterioare este mai mare decît 360°, ceeace este absurd (suma măsurilor unghiurilor exterioare unui poligon convex este 360°).

2) Fie ABC un triunghi. Să se găsească locul geometric al punctelotr $M \in (ABC)$, pentru care $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$.

Soluţie:



Fie $|AA'|$ mediana din A şi $CQ \perp AA'$, $BP \perp AA'$

$\Delta BA'P \equiv CA'Q$ pentru că

$$\begin{cases} \widehat{PBC} \equiv \widehat{BCQ} \text{ alterne interne} \\ \widehat{PA'B} \equiv \widehat{CA'Q} \text{ opuse la vîrf} \\ |BA'| \equiv |A'C| \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\|BP\| = \|QC\|$ şi prin construcţie $BP \perp AA'$, $CQ \perp AA'$

Locul geometric căutat este mediana $|AA'|$. Întradevăr, pentru oricare $M \in |AA'|$ avem $\sigma\ [ABM] = \sigma\ [ACM]$

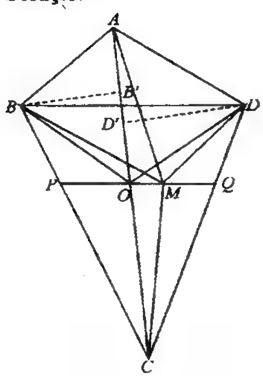
pentru că triunghiurile ABM şi ACM au a latură comună $|AM|$ şi înălţime corespunzătoare acestei comune egale $\|BP\| = \|QC\|$

Reciproc: Dacă $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$ să demonstrăm că $M \in |AA'|$. Într-adevăr: $\sigma[ABM] = \sigma[ACM] \Rightarrow d(B, AM) = d(C, AM)$, deoarece $|AM|$ latură comună, $d(B, AM) = \|BP\|$ şi $d(C, AM) = \|CQ\|$ şi ambele sînt perpendiculare pe $AM \Rightarrow PBQC$ paralelogram punctele P, M, Q sînt coliniare (P, Q picioarele perpendicularelor din B şi C pe AM).

În paralelogramul $PBQC$ avem $|PQ|$ şi $|BC|$ diagonale $\Rightarrow AM$ trece prin mijlocului $|BC|$ deci $M \in |AA'|$ mediana din A.

3) Se dă un patrulater convex $ABCD$. Să se afle locul geometric al punctelor $M \in$int.$ABCD$ pentru care $\sigma[MBCD] = \sigma[MBAD]$.

Soluţie:



Fie O mijlocul diagonalei $|AC| \Rightarrow \|AO\| = \|OC\|$

$$\sigma[AOD] = \sigma[COD] \qquad (1)$$

pentru că $\begin{cases} \|AO\| = \|OC\| \\ \|OD'\| \text{ înălţime comună} \end{cases}$

$$\sigma[AOB] = \sigma[COB] \qquad (2)$$

aceleaşi motive; adunăm (1) şi (2) $\Rightarrow$

$$\sigma[ADOB] = \sigma[DCBO] \quad (3)$$

deci O este un punct al locului căutat.

Construim prin O o paralelă la BD pînă taie laturile $|BC|$ şi $|DC|$ în P respectiv Q. Locul geometric căutat este $|PQ|$.

Într-adevăr $(\forall)$ $M \in |PQ|$ avem:

$\sigma[MBAD] = \sigma[ABD] + \sigma[BDM] = \sigma[ABD] + \sigma[BOD] = \sigma[ABOD]$.

$\sigma[BDO] = \sigma[BDM]$ pentru că M şi $Q \in$ unei paralele la BD.

iar $\sigma[BCDM] = \sigma[PQC] + \sigma[PMB] + \sigma[MQD] = \sigma[PQC] + \sigma[PBO] + \sigma[OMB] + \sigma[MQD] \stackrel{*}{=}$

$\sigma[OMB] = \sigma[OMD]$ (B, $D \in$ unei paralele la OM

$\stackrel{*}{=} \sigma[PQC] + \sigma[PBO] + \sigma[OMD] + \sigma[MQD] = \sigma[OBCD]$

Deci $\left.\begin{array}{l} \sigma[MBAD] = \sigma[ABOD] \\ \text{şi } \sigma[BCDM] = \sigma[OBCD] \\ \text{şi din (3)} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma[MBAD] = \sigma[BCDM]$.

Reciproc: Dacă $\sigma[MBCD] = \sigma[MBAD]$ să demonstrăm că $M \in$ paralelei prin O la BD. Într-adevăr:

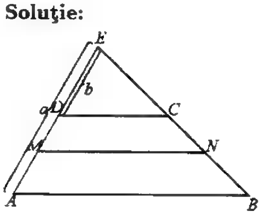
$$\left.\begin{array}{l} \sigma[BCDM] = \sigma[MBAD] \\ \text{şi cum } \sigma[BCDM] + \sigma[MBAD] = \sigma[ABCD] \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma[MBCD] = \sigma[MBAD] =$$

$= \dfrac{\sigma[ABCD]}{2}$ (1) dar şi $\sigma[ABOD] = \sigma[OBCD] = \dfrac{\sigma[ABCD]}{2}$ (2)

Deci din (1) şi (2) $\Rightarrow \sigma[ABMD] = \sigma[ABOD] \Rightarrow \sigma[ABD] + \sigma[BDO] = \sigma[ABD] + \sigma[BDM] \Rightarrow \sigma[BDO] = \sigma[BDM] \Rightarrow M$ şi O se află pe o paralelă la BD.

4) Să se determine o dreaptă MN, paralelă cu bazele unui trapez $ABCD$ ($M \in |AD|$, $N \in |BC|$) astfel încît diferenţa ariilor lui $[ABNM]$ şi $[MNCD]$ să fie egală cu un număr dat.

Soluţie:



Notăm $\|EA\| = a$ şi $\|ED\| = b$, $\|EM\| = x$

$$\frac{\sigma[EMN]}{\sigma[EDC]} = \frac{x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{[MNCD]}{\sigma[EDC]} = \frac{x^2 - b^2}{b^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\sigma[EAB]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{[ABCD]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \qquad (3)$$

Din (3) scădem (2) $\Rightarrow \dfrac{\sigma[ABCD] - \sigma[MNCD]}{\sigma[ECD]} =$

$$= \frac{a^2 - x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ABNM]}{\sigma[ECD]} = \frac{a^2 - x^2}{b^2} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Din (4) scădem (2)} \Rightarrow \dfrac{\sigma[ABNM] - \sigma[MNCD]}{\sigma[EDC]} = \dfrac{a^2 - x^2 - x^2 - b^2}{b^2} \\ \text{din ipoteza } \sigma[ABNM] - \sigma[MNCD] = k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{k}{\sigma[EDC]} =$$

$$= \frac{a^2+b^2-2x^2}{b^2} \Longrightarrow \frac{kb^2}{\sigma[ECD]} - a^2 - b^2 = -2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(a^2+b^2)\sigma[ECD] - kb^2}{\sigma[ECD]}$$

Din relaţia (3) notînd $\sigma[ABCD] - S \Rightarrow \sigma[ECD] = \dfrac{Sb^2}{a^2-b^2}$

Înlocuind aceasta în relaţia lui x^2 obţinem:

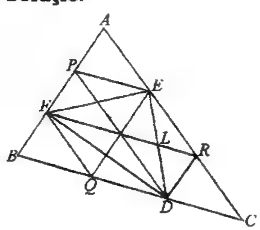
$$x^2 = a^2 + b^2 - kb^2\frac{a^2-b^2}{Sb^2} \Rightarrow x^2 = \frac{(a^2+b^2)s - k(a^2-b^2)}{S} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{(s-k)a^2+(s+k)b^2}{S} \\ x = \|EM \end{array}\right\} \Rightarrow \|EM\| = \sqrt{\frac{(s-k)a^2+(s+k)b^2}{S}}$$ şi ţinînd seama de faptul că $\|EM\| = \|DM\| + b$

avem $\|DM\| = \sqrt{\dfrac{(s-k)a^2+(s+k)b^2}{S}}$ deci avem poziţia punctului M pe segment $[DA]$ (era însă suficient şi calcularea distanţei $\|EM\|$).

5) Pe laturile ΔABC se iau punctele D, E, F astfel încît $\dfrac{\|BD\|}{\|DC\|} = \dfrac{\|CE\|}{\|EA\|} = \dfrac{\|AF\|}{FB\|} = 2$. Să se afle raportul ariilor triunghiulor DEF şi ABC.

Soluţie:



Se observă din construcţie că $EQ \parallel AB \parallel RD$ mai mult, acestea sînt paralele echidistante. Analog EQ, PD, AC şi AB, EQ, RD sînt de asemenea paralele echidistante

$(\|AP\| = \|PF\| = \|FB\|; \|AE\| = \|ER\| = \|RC\|,$

$\|BQ\| = \|QD\| = \|DC\|)$.

Notăm $\sigma[BFQ] = S$.

Bazîndu-ne pe proprietăţile:

- două triunghiuri au arii egale dacă au baze egale şi aceeaşi înălţime;
- două triunghiuri au arii egale dacă au aceeaşi bază şi al treilea vîrf pe o paralelă la bază.

Avem:

$\sigma[ABC] = \sigma[AFE] + \sigma[FER] + \sigma[FBO] + \sigma[FRD] + \sigma[DRC] = 9S$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma[FEL]=\sigma[FER]-\sigma[ELR]=2S-\sigma[ELR]\\ \sigma[FDL]=\sigma[FRD]-\sigma[RLD]=2S-\sigma[RLD]\end{array}\right\}\overset{\text{prin adunare}}{\Longrightarrow}$$

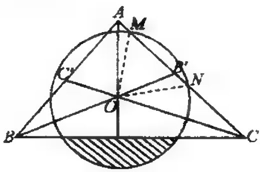
$\Rightarrow \sigma[DEF]=4S-(\sigma[ELR]+\sigma[RLD])=4S-S=3S.$

Deci $\dfrac{\sigma[DEF]}{\sigma[ABC]}=\dfrac{3S}{9S}=\dfrac{1}{3}$

(eventual pot fi aranjate ariile S).

6) Se consideră un triunghi echilateral ABC şi discul $\left[C\left(O,\frac{a}{3}\right)\right]$ unde O este ortocentrul triunghiului şi $a=\|AB\|$. Să se determine aria $[ABC]-\left[C\left(O,\frac{a}{3}\right)\right]$.

Soluţie:



$\|OB\|=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ (BB' mediană)

În $\Delta MOB'$:

$$\cos\widehat{MOB'}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \mu(\widehat{MOB'}=\dfrac{\pi}{6}.$$

Deci $\mu(\widehat{MON})=\dfrac{\pi}{3}$.

Notăm cu Σ suprafaţa din disc limitată de o latură a triunghiului în exteriorul triunghiului.

$\sigma[\Sigma]=\sigma[\text{sector circular } MON]$ - $\sigma[MON]=\dfrac{\pi a^2}{9\cdot 6}-\dfrac{a^2}{9\cdot 2}\sin 60^\circ=\dfrac{\pi a^2}{9\cdot 6}-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot 9}=\dfrac{a^2}{18}\cdot$
$\cdot\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Dacă prin aria discului vom scădea de 3 ori $\sigma[\Sigma]$ vom afla aria porţiunii din disc din int. ABC. Deci aria suprafeţei din disc din int. ABC este:

$\dfrac{\pi a^2}{9}-3\dfrac{a^2}{18}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi a^2}{9}-\dfrac{\pi a^2}{18}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\pi a^2}{18}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$. Aria căutată se obţine scăzînd din $\sigma[ABC]$, aria calculată.

Deci $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi a^2}{18}-\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{12}-\dfrac{\pi a^2}{18}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}-\dfrac{\pi a^2}{18}=\dfrac{a^2}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$.

7) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $1+\cos A\cos(B-C)=\dfrac{b^2+c^2}{4R^2}$

b) $(b^2+c^2=a^2)\operatorname{tg}A=4S$

c) $\dfrac{b+c}{2c\cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{A}{2}+C\right)}{\sin(A+B)}$.

d) $p=r(\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{ctg}C2)$

e) $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=\dfrac{p}{r}$

Soluţie:

a) $1+\cos A\cdot\cos(B-C)=\dfrac{b^2+c^2}{4R^2}$

$$1+\cos A\cos(B-C)=1+\cos[\pi-(C+B)]\cos(B-C)=1-\cos(B+C)\cdot\cos(B-C)=$$

$$1-\frac{1}{2}[\cos 2B+\cos 2C]=1-\frac{1}{2}[2\cos^2 B-1+2\cos^2 C-1]=2-\cos^2 B-\cos^2 C=\sin^2 B+$$

$$+\sin^2 C\overset{din\ T.\ sin}{=}\frac{b^2}{4R^2}+\frac{C^2}{4R^2}=\frac{b^2+c^2}{4R^2}.$$

b) $(b^2+c^2-a^2)\operatorname{tg}A=4S$

Soluţie:

Se demonstrează că $\operatorname{tg}A=\dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}$:

$$\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}-1}=\frac{2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}}{2\frac{p(p-a)}{bc}-1}=\frac{2S}{bc\left(\frac{2p(p-a)-bc}{bc}\right)}=$$

$$=\frac{2S}{bc\left(\frac{2p(p-a)-bc}{bc}\right)}=\frac{2S}{2\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}-bc}=$$

$$\frac{4S}{ab+ac-a^2+b^2+bc-ba+bc+c^2-ac-2bc}=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2}.$$

d) Să demonstrăm că $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{ctg}C2=\dfrac{p}{r}$.

Soluţie:

Într-adevăr

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.$$

$$\cdot\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}=p\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}}=\frac{p^2}{S}\overset{S=pr}{=}\frac{p^2}{pr}=\frac{p}{r}.$$

Rămîne acum să demonstrăm că:

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\iff \text{Într-adevăr}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\Leftrightarrow\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+$$

$$+\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\iff\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2})}\iff\frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2})}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2})}\qquad(a)$$

q.e.d.

c) $$\frac{b+c}{2c\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin(\frac{A}{2}+C)}{\sin(A+B)}\overset{A+B=\pi-C}{\Longrightarrow}\frac{b+c}{2c\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin(\frac{A}{2}+C)}{\sin C}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{b+c}{2c\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin A2\cos C+\sin C\cos\frac{A}{2}}{\sin C}\Longrightarrow(b+c)\sin C=2C\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos C+$$

$$2c\sin C\cos^2\frac{A}{2}\Longrightarrow(b+c)\sin C=c\sin A\cos C+2c\sin C\cos^2\frac{A}{2}\ \text{şi}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Longrightarrow(b+c)\frac{ac}{2k}\cos C=\frac{2c^2\cos^2\frac{A}{2}}{2R}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b+c=a\cos C+2\cos^2\frac{A}{2}\Longrightarrow b+c=a\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+2c\frac{p(p-a)}{bc}\Longrightarrow b+c=$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}+\frac{2p(p-a)}{b}\Longrightarrow 2b^2+2bc=a^2+b^2-c^2+(a+b+c)(c+b-a)\Longrightarrow$$

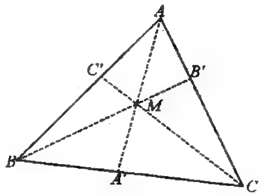
$\Longrightarrow$ Toţi termenii se reduc.

8) Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, să se arate că:

a) $\|AH\| = 2R\cos A$;

b) $a\|AH\| + b\|BH\| + c\|CH\| = 4S$.

Soluţie:



a) În triunghiul ABB': $\|AB'\| = c\cos A$

În $\triangle AHB'$: $\cos \widehat{HAB'} = \|AB'\| : \|AH\| \Rightarrow \|AH\| =$

$$= \frac{\|AB'}{\cos \widehat{HAB'}} = \frac{\|AB'\|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right)} = \frac{c\cos A}{\sin C} \overset{T.\sin}{=} \frac{c\cos A}{\frac{c}{2R}} =$$

$= 2R\cos A \Rightarrow \|AH\| = 2R\cos A$.

b) $a\|AH\| + b\|BH\| + c\|CH\| = 2R(a\cos A + b\cos B + c\cos C) \overset{T.\sin}{=} 4R^2(\sin A\cos A +$

$+ \sin B\cos B + \sin C\cos C) = 2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$.

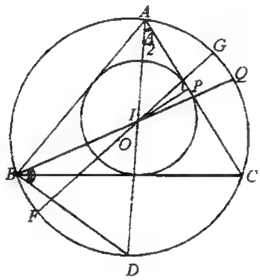
Am folosit: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$.

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \underbrace{2\sin(A+B)}_{\sin C}\cos(A-B) + 2\sin C\cos C =$$

$$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 2\sin C \cdot 2\sin A\sin B = 4\sin A\sin B\sin C.$$

9) Dacă O este centrul cercului circumscris triungiului ABC iar I este centrul cercului înscris, să se arate că $\|OI\|^2 = R(R-2r)$.

Soluţie:



Folosind puterea punctului I faţă de cercul $C(O, R)$
$\Rightarrow \|IG\| \cdot \|IF\| = \|AI\| \cdot \|ID\| \quad (1)$
dar $\|IG\| \cdot \|IF\| = (R - \|OI\|)(\|R + \|OI\|) \Rightarrow$
$\|IG\| \cdot \|IF\| = R^2 - \|OI\|^2$.
Ţinind seama de (1) avem $\|IA\| \cdot \|ID\| = R^2\|OI\|^2$.
Calculăm acuma distanţele $\|IA\|$ şi $\|ID\|$
În triunghiul $\triangle IAP$

$$\|IA\| = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \qquad (2)$$

Calculăm şi pe $\|ID\|$:
$\mu(\widehat{BID}) = \mu(\widehat{DBI})$ au aceaşi măsură, mai precis:

$$\mu(\widehat{BID}) = \frac{m(\widehat{BD}) + m(\widehat{AQ})}{2} = \frac{m(\hat{A}) + m(\hat{B})}{2}$$

$$m\left(\frac{\widehat{DCQ}}{2}\right) = m(\widehat{DBI}) \text{ Deci } \|ID\| = \|BD\|. \qquad (3)$$

În $\triangle ABD$ cu teorena sinusilor avem:

$\dfrac{\|BD\|}{\sin\frac{A}{2}} = 2R \Rightarrow \|BD\| = 2R\sin\dfrac{A}{2}$. Deci ţinînd seama de (3)

$$\|ID\| = 2R\sin\frac{A}{2}. \qquad (4)$$

Revenind în relaţia $\|IA\| \cdot \|ID\| = R^2 - \|IO\|^2$ cu (2) şi (4) avem: $\dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}} \cdot 2R\sin\dfrac{A}{2} =$

$R^2 - \|IO\|^2 \Rightarrow \|IO\|^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow \|IO\|^2 = R(R - 2r)$.

10) Să se arate că în orice triunghi ABC avem: $\cos^2\dfrac{B-C}{2} \geq \dfrac{2r}{R}$.

Soluţie:

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow r = 2R\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B-C}{2} - \underbrace{\cos\frac{B+C}{2}}_{\sin\frac{A}{2}}) \Rightarrow$$

$$r = 2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2R\sin^2\frac{A}{2} \Rightarrow 2R\sin^2\frac{A}{2} - 2R\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2} + r \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 4R^2\cos^2\frac{B-C}{2} - 8Rr \geq 0 \Rightarrow R^2\cos^2\frac{B-C}{2} - 2Rr \geq 0 \Rightarrow \cos^2\frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}$$

Nota. Rămîne să arătăm că $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$.

Într-adevăr:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\cdot\frac{(p-a)(p-c)}{ac}\cdot\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$$

$$= \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} \overset{\substack{f-la\ Heron \\ si\ abc=4RS}}{=} \frac{S^2}{p4RS} = \frac{pr}{p4R} = \frac{r}{4R}$$

11) Să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$ ştiind că $z + \frac{1}{z} = 2\sin a$

Soluţie:

$$z + \frac{1}{z} = 2\sin a \Rightarrow z^2 - 2(\sin a)z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{\sin \pm\sqrt{\sin^2 a - 1}}{1}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \sin a \pm \sqrt{-\cos^2 a} \Rightarrow z_{1,2} = \sin a \pm i\cos a$$

Deci $\begin{array}{l} z_1 = \sin a + i\cos a \\ z_2 = \sin a - i\cos a = \bar{z}_1 \end{array}$

Calculăm pentru z_1 şi z_2:

$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = z_1^n + \left(\frac{1}{z_1}\right)^n = z_1^n + z_2^n$, deci $z^n + \frac{1}{z^n}$ ia aceiaşi valoare şi pentru z_1. şi pentru z_2 şi este suficient să calculăm pentru z_1.

$$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = (\sin a + i\cos a)^n + \frac{1}{(\sin a + i\cos a)} = [\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)]+$$

$$+\frac{1}{[\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)]^n} = \cos[n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)] + i\sin[n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)]+$$

$$+\cos[n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)] - i\sin[n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)] = 2\cos[n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)] \overset{cos.\ par}{=} 2\cos\left(na - \frac{a\pi}{2}\right).$$

Analog $z_2^n + \bar{z}_2^n = 2\cos[n\left(a - \frac{\pi}{2}\right)]$.

12) Să se rezolve ecuaţia: $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$

Soluţie:

$$(z+1)^n-(z-1)^n=a \Rightarrow (z+1)^n=(z-1)^n \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z+1}{z-1}=\sqrt[n]{1} \Rightarrow \frac{z+1}{z-1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z+1=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)z-\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}-1\right)z=\left(1+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-2\sin^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)z=2\cos^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}{-2\sin^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}=\text{(înlocuim -1 cu } i^2 \text{ la numitor)}$$

$$=\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}=\frac{\cos k\pi}{i\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{i}{i^2}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}=-i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}.$$

13) Să se demonstreze că dacă $|z|<\frac{1}{2}$, atunci $|(1+i)z^3+iz|<\frac{3}{4}$.

Soluţie:

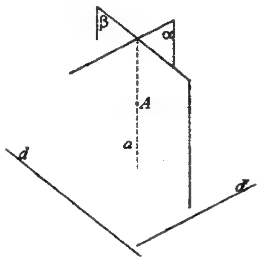
Într-adevăr:

$$|(1+i)z^3+iz| \overset{\substack{\text{propr. modulului} \\ |a+b|\leq|a|+|b|}}{\leq} |(1+i)z^3|+|iz| \overset{\substack{\text{propr } |ab|=|a|\cdot|b| \\ \text{si pt. numere complexe}}}{=} |1+i|\cdot|z^3|+|i|\cdot|z|=$$

$$\overset{\substack{|1+i|=2 \\ |i|=1}}{=} 2|z^3|+|z| \overset{ip.}{\leq} 2\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4} \Rightarrow |(1+i)z^3+iz|\leq\frac{3}{4}.$$

14) Se dau dreptele d şi d'. Să se arate că prin fiecare punct al spaţiului trece o dreaptă perpendiculară pe d şi d'.

Soluţie:



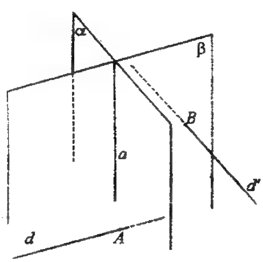
Construim $\alpha \perp d$ şi $A \in \alpha$. Planul α astfel construit este unic. Analog construim $\beta \perp d'$ şi $A \in \beta$, $\alpha \cap \beta = a \ni A$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Din } \alpha \perp d \Rightarrow d \perp a \\ \text{Din } \beta \perp d' \Rightarrow d' \perp a\end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ este o dreaptă ce trece prin}$$

A şi este perpendiculară şi pe d şi pe d'. Dreapta a este unică, deoarece α şi β construite ca mai sus sînt unice.

15) Se dau dreptele d şi d' nesituate în acelaşi paln şi punctele $A \in d$, $B \in d'$. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care:

$$\mathrm{pr}_d M = A \text{ şi } \mathrm{pr}_{d'} M = B.$$



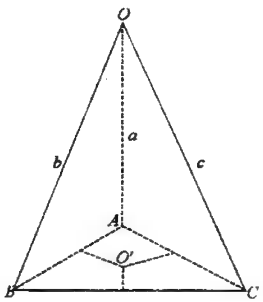
Construim planul α astfel încît $A \in \alpha$ şi $d \perp \alpha$. Construim plabul β astfel încît $B \in \beta$ şi $d' \perp \beta$. Planele α şi β astfel construite sînt unice. Fie $a = \alpha \cap \beta \Rightarrow a \subset \alpha$ deci $(\forall)$ $M \in a$ are proprietatea $\mathrm{pr}_d M = A$.

$a \subset \beta \Rightarrow (\forall)$ $M \in a$ are proprietatea $\mathrm{pr}_{d'} M = B$.

Reciproc. Dacă în spaţiu există un punct M astfel încît $\mathrm{pr}_d M = A$ şi $\mathrm{pr}_{d'} M = B \Rightarrow$ $\Rightarrow M \in \alpha$ şi $M \in \beta \Rightarrow M \in \alpha \cap \beta \Rightarrow M \in a$.
(α şi β construite anterior)

16) Să se găsească locul geometric al punctelor din interiorul unui triedru $\widehat{abc}$ egal depărtate de muchiile lui a, b, c.

Soluţie:



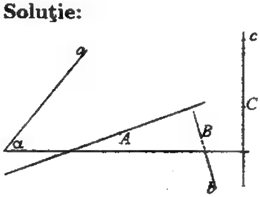
Fie $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ astfel încît $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$. Triunghiurile OAB, OBC, OAC sunt isoscele. Planele mediatoare ale segmentelor $\|AB\|$, $\|AC\|$, $\|BC\|$ trec prin O şi O' (centrul cercului circumscris triunghiului ABC). Semidreapta $|OO'|$ este locul geometric căutat.

Într-adevăr $(\forall)$ $M \in |OO'| \Rightarrow M \in$ palnului mediator al segmentelor $|AB|$, $|AC|$ şi $|BC| \Rightarrow M$ este egal depărtat de a, b şi c.

Reciproc: $(\forall)$ M cu proprietatea: $d(M,a) = d(M,b) = d(M,c) \Rightarrow M \in$ palnul mediator, planelor mediatoare ale segmentelor $|AB|$, $|AC|$, $|BC| \Rightarrow M \in$ intersecţiei acestor plane $\Rightarrow M \in |OO'|$.

17) Să se construiască o dreptă care să intersecteze două drepte date şi să fie perpendiculară pe altă dreaptă dată.

Soluţie:



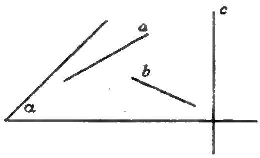
Fie a, b, c cele 3 drepte din spaţiu.

I. Presupunem $a \not\perp c$ şi $b \not\perp c$. Fie α un plan astfel încît:

$$\alpha \cap c = \{C\}$$
$$\alpha \cap a = \{A\} \text{ şi } \alpha \perp c$$
$$\alpha \cap b = \{B\}$$

Construcţia este posibilă pentru că $a \not\perp c$ şi $b \not\perp c$. Dreapta AB întîlneşte pe a pe p şi este perpendiculară pe c, deoarece $AB \subset \alpha$ şi $c \perp \alpha$.

II. Dacă $a \perp c$ sau $b \perp c$, construcţia nu este mereu posibilă decît dacă planul $p(a,b)$ este perpendicular pe c.

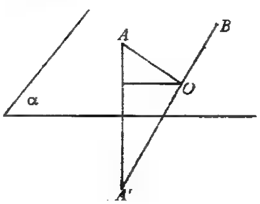


III. Dacă $a \perp c$ şi $b \not\perp c$, construim planul $\alpha \perp c$ astfel încît $a \subset \alpha$ şi $b \subset \alpha \neq \emptyset$.

Orice punct de pe dreapta a unit cu punctul $b \cap \alpha$ este o dreaptă căutată.

18) Fiind date punctele A şi B situate de aceeaşi parte a unui paln, să se afle în acest plan punctul pentru care suma distanţelor sale la A şi B este minimă.

Soluţie:

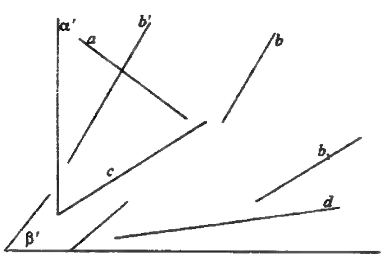


Se construieşte A' simetricul lui A faţă de α. A' şi B sînt în semispaţii opuse, $\alpha \cap |A'B| = O$.

O este punctul căutat, deoarece $\|OA\| + \|OB\| = \|OA'\| + \|OB\|$ este minimă cînd $O \in |A'B|$, deci punctul căutat este $O = |A'B| \cap \alpha$.

19) Printr-o dreaptă să se ducă un plan pe care proiecţiile a două drepte să fie paralele.

Soluţie:



Fie a, b, d cele 3 drepte date şi prin d să construim un plan în care a şi b să se proiecteze

după drepte paralele.

Fie A un punct arbitrar pe a. Prin A construim dreapta $b' \parallel b$. Din construcţie rezultă $b \parallel \alpha$, $\alpha = p(a, b')$.

Fie β astfel încît $d \subset \beta$ şi $\beta \perp \alpha$.

Dreptele a şi b' se proiectează în β după aceeaşi dreaptă c. Dreapta b se proiectează în β după b_1 şi $b_1 \parallel c$.

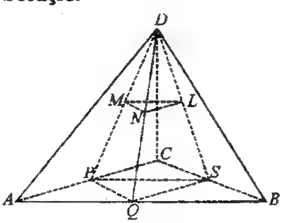
Dacă $b_1 \nparallel c \Rightarrow s \bigcap b_1 = \{N\} \Rightarrow \alpha \bigcap p(b, b_1) \neq \emptyset \Rightarrow b \bigcap \alpha \neq \emptyset$, absurd pentru că $b \parallel \alpha (b \parallel b')$.

20) Se consideră un tetraedru $[ABCD]$ şi centrele de greutate L, M, N ale triunghiurilor BCD, CAD, ABD.

a) Să se arate că $(ABC) \parallel (LMN)$;

b) Să se afle raportul $\dfrac{\sigma[ABC]}{\sigma[LMN]}$.

Soluţie:



M centru de greutate în $\triangle ACD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|MD|}{|MP|} = 2 \qquad (1)$$

N centru de greutate în $\triangle ABD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|ND|}{|NQ|} = 2 \qquad (2)$$

L centru de greutate în $\triangle BCD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|LD|}{|LS|} = 2 \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Din 1 şi 2} \Rightarrow MN \parallel PQ \\ \text{Din 2 şi 3} \Rightarrow ML \parallel QS \end{array}\right\} \Rightarrow (LMN) \parallel (PQS) = (ABC) \Rightarrow (LMN) \parallel (ABC).$$

$\dfrac{\sigma[SPQ]}{\sigma[ABC]} = \dfrac{s}{4s} = \dfrac{1}{4}$ (din faptul că $\sigma[AQP] = \sigma[PQS] = \sigma[QBS] = \sigma[PSC] = s$).

Deci $\dfrac{\sigma[ABC]}{\sigma[LMN]} = \dfrac{4}{1} \cdot \dfrac{9}{4} = 9$.

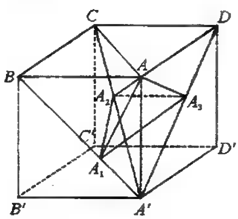
22) Se consideră un cub $[ABCDA'B'C'D']$. Punctul A se ppoiectează pe $A'B$, $A'C$, $A'D$ respectiv în A_1, A_2, A_3. Să se arate că:

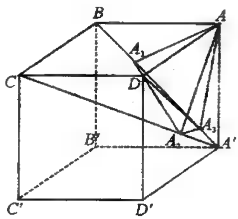
a) $A'C \perp (A_1A_2A_3)$;

b) $AA_1 \perp A_1A_2$, $AA_3 \perp A_3A_2$;

c) $AA_1A_2A_3$ este unpatrulater inscriptibil.

Soluţie:





1. $BD \perp (AA'C)$ din ipoteză $ABCDA'B'C'D$ cub (1)

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \text{ mijlocul segmentului } [BA'] \\ (ABA') \text{ isoscel şi } AA_1 \perp BA' \\ A_3 \text{ mijlocul lui } [A'D] \end{array}\right\} \Rightarrow [A_1A_3] \text{ layură mijlocie în } \Delta A'BD \Rightarrow A_1A_3 \parallel BD. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow A_1A_3 \perp (AA'C) \Rightarrow A'C \perp A_1A_3$ (3)

Din $\Delta ACA' : \|AA_2\| = \dfrac{\|AC\| \cdot \|AA'\|}{\|A'C\|} = \dfrac{a\sqrt{2 \cdot a}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Din $\Delta ABA' : \|AA_1\| = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$; analog $\|AA_3\| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\|$.

În $\Delta ACA'$: $\|AA'\|^2 = \|A'A_2\| \cdot \|A'C\| \Rightarrow a^2 = \|A'A_2\| \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow \|A'A_2\| = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ şi $\|A'A_1\| = \|\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\|$.

$$(\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\Delta A'BC))$$

$\|A_1A_2\|^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{3} - 2\dfrac{a^2}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5a^2}{6} - \dfrac{2a^2}{3} = \dfrac{a^2}{6}$.

$\|AA_2\|^2 = \|a_1A_2\|^2 + \|AA-1\|^2 \Rightarrow \dfrac{a^2 6}{9} = \dfrac{a^2}{6} + \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow \dfrac{2a^2}{3} = \dfrac{2a^2}{3} \overset{pct.(B)}{\Rightarrow} AA_1 \perp A_1A_2$ *pct.*(B) $AA_3 \perp A_2A_3$.

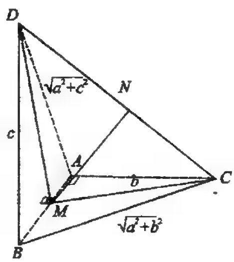
$\Delta A_1A_2A'$ drept. cu $m(A'A_2A_1) = 90$ pt. că $\|A'A_1\|^2 = \|A'A_2\|^2 + \|A_1A_2\|^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2} = = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{6} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{6}(a) \Rightarrow A'C \perp A_1A_2$ (4)

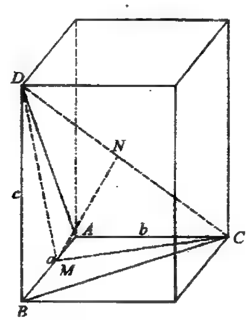
Din 4 şi 3 $\Rightarrow A'C \perp (A_1A_2A_3)$.

Cum $\left.\begin{array}{l} A'C\perp(A_1A_2A_3) \\ A'C\perp A_2A \text{ (prin constr.)} \end{array}\right\} \Rightarrow A_1A_2A_3A$ coplanare $\Rightarrow A_1A_2A_3A$ patrulater cu unghiurile opuse $\widehat{A_1}$ şi $\widehat{A_3}$ drepte $\Rightarrow A_1A_2A_3A$ patrulater inscriptibil.

29) Se consideră triunghiurile dreptunghice BAC şi $ABD(m(\widehat{BAC})) = m((\widehat{ABD}) = 90°)$ situate în plane perependiculare M şi N fiind mijloacele segmnetelor $[AB], [CD]$. Să se arate că $MN\perp CD$.

Soluţie:





Concluzia este adevărată numai dacă $\|BD\| = \|AC\|$ adică $b = c$

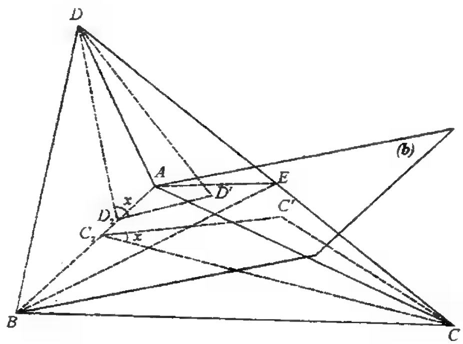
$$\|NC\| = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2};\ \|MC\| = \sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}};\ \|MN\| = \frac{b^2+c^2}{3}$$

(cu teorema medianei ? ΔDMC).

$MN\perp DC$ dacă $\|MC\|^2 = \|MN\|^2 + \|NC\|^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{b^2+c^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 + 2b^2 +$ $+2c^2 = 4b^2 + a^2 \Rightarrow c^2 = b^2 \Rightarrow b = c.$

30) Să se demonstreze că semiplanul bisector al unui unghi diedru într-un tetraedr, împarte muchia opusă în segmente proporţionale cu ariile feţelor alăturate.

Soluţie:



plan bisector

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}DD'\perp(ABE)=b\\ DD_1\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow D'D_1\perp AB\\ \left.\begin{array}{l}CC'\perp(ABE)\\ CC_1\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow C'C_1\perp AB \text{ cum } C', C_1, D', D_1\end{array}\right\}\Rightarrow D_1D'\|C_1C'\|.$$

$m(\widehat{DD_1D'}) = m(\widehat{C'C_1C}) = x$($b$ semiplan bisector)

În triunghiul DD_1D' : $\left.\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{\|DD'\|}{\|DD_1\|}\\ \sin x = \dfrac{\|CC'\|}{\|CC_1\|}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\|DD'\|}{\|DD_1\|} = \dfrac{\|CC'\|}{\|CC_1\|} \Rightarrow \dfrac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \dfrac{\|DD_1\|}{\|CC_1\|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \frac{\sigma[ABD]}{\sigma[ABC]} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}v[ABED] = \dfrac{\sigma[ABE]\cdot\|DD'\|}{3}\\ v[ABEC] = \dfrac{\sigma[ABE]\cdot\|CC'\|}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \frac{v[ABED}{v[ABEC]} \qquad (2)$$

dar

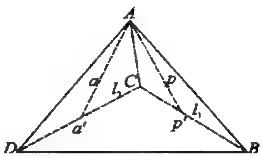
$$\left.\begin{array}{l}v[ABED] = \dfrac{\sigma[DEC]\cdot d(A,(DEC))}{3}\\ v[ABEC] = \dfrac{\sigma[BEC]\cdot d(A,(DBC))}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v[ABED]}{v[ABEC]} = \frac{\sigma[BDE]}{\sigma[BEC]} = \frac{\|DE\|\cdot d(B,DC)}{\|EC\|\cdot d(B,DC)} =$$

$$= \frac{\|DE\|}{\|EC\|} \Rightarrow \left|\frac{v[ABED]}{v[ABEC]}\right| = \frac{\|DE\|}{\|EC\|} \qquad (3)$$

Din 1, 2, 3 $\Rightarrow \dfrac{\sigma[ABD]}{\sigma[ABC} = \dfrac{\|DE\|}{\|EC\|}$ c. t. d.

31) Fie A un vîrf al unui tetraedru regulat şi P, Q două puncte pe suprafaţa lui. Să se arate că $m(\widehat{PAQ}) \leq 60°$.

Soluţie:



Tetraedrul fiind regulat $\Rightarrow$ $\|AB\| = \ldots = \|BD\| = l$

$\|CP'\| = l_1$

$\|CQ'\| = l_2$

$$\cos\widehat{QAP} = \cos(\widehat{Q'AP'}) = \frac{\|AQ'\|^2 + \|AP'\|^2 - \|Q'P'\|^2}{2\|AQ'\| \cdot \|AP'\|} \geq \text{ majorăm numitorul } \geq$$

$$\geq \frac{l^2 + l_2^2 - ll_2 + l^2 - ll_1 - l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2}{2l^2} = \frac{l^2 + l^2 - ll_1 - ll_2 + l_1 l_2}{2l^2} = \frac{1}{2} + \frac{(l - l_1)(l - l_2)}{2l^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{QAP} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow m(\widehat{QAP}) \leq 60°.$$

Dacă unul din punctele P sau Q se află pe faţa CBD problema este evidentă.

32) Să se arate că suma măsurilor unghiurilor diedre ale unui tetraedru este mai mare decît 360°.

Soluţie:

163-2

Considerăm triedrul $Oxyz$ demonstrăm că suma măsurilor diedrelor acestui triedru, este mai mare decît 360°. Într-adevăr: fie $100'$ bisectoarea interioară triedrului $Oxyz$ ($1000'$ intersecţia planelor bisectoare ale celor 3 diedre) ...? triedrului în A, B, C.

Mărimea fiecărui diedru cu muchiile ox, oy, oz este mai mare decît mărimile unghiurilor corespunzătoare $\triangle ABC$ suma măsurilor unghiurilor diedre ale triedrului $Oxyz$ este mai mare decît 180°.

Fie (a,b) pl. $\perp$ pe oz în C; $\begin{matrix} a\perp oz \\ b\perp oz \end{matrix}$ dar $|CA$ şi $|CB$ sunt în acelaşi semispaţiu faţă de $(ab) \Rightarrow m(\widehat{C}) < m(\widehat{ab})$.

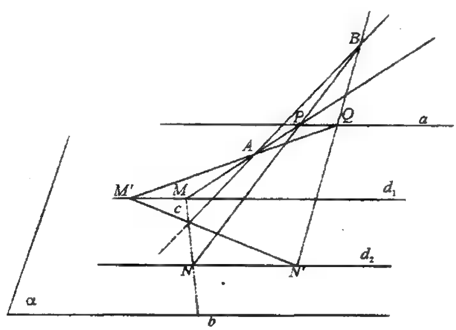
Fie în tetraedrul $ABCD, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ şI α_6 cele 6 unghiuri diedre formate de feţele tetraedrului.

$$\left.\begin{array}{l} m(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) > 180 \\ m(\alpha_1)+m(\alpha_3)+m(\alpha_6) > 180 \\ m(\alpha_2)+m(\alpha_4)+m(\alpha_5) > 180 \\ m(\alpha_4)+m(\alpha_5)+m(\alpha_6) > 180 \end{array}\right\} \text{Conform inegalităţii stabilite anterior.}$$

$$2(m(\alpha_1)+m(\alpha_2)+\ldots+m(\alpha_6)) > 4\cdot 180 \Rightarrow m(\alpha_1)+\ldots+m(\alpha_6) > 360°.$$

33) Să se consideră dreptele planele d_1, d_2 conţinute într-un plan α şi o dreaptă AB care intersectează planul α în punctul C. O dreaptă variabilă, inclusă în α şi trecînd prin C toate d_1, d_2 respectiv în MN. Să se afle locul geometric al intersecţie $AM \cap BN$. În ce caz locul geometric este mulţimea vidă.

Soluţie



Notăm cu a intersecţia planelor (A, d_1) şi (B, d_2). Deci

$$(A, d_1) \cap (B, d_2) = a.$$

Fie b o dreaptă variabilă ce trece prin C şi conţinută în α, care taie pe d_1 şi d_2 în M respectiv N. Avem: $MA \subset (A, d_1)$ $MA \cap NB = P(MA$ şi NB se intersectează deoarece sînt conţinute în planul determinat de $(AM, b))$.

Deci $P \in (Ad_1)$ şi $P \in (Bd_2) \Rightarrow P \in a$ deci P descrie dreapta a intersecţia planelor (A, d_1) şi (B, d_2). Reciproc: fie $Q \in a$

În planul $(A, d_1) : QA \cap d_1 = M'$.

În planul $(B, d_2) : QB \cap d_2 = N'$.

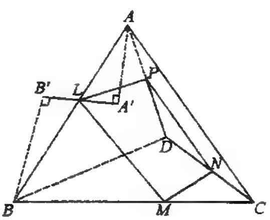
Drepte $N'M'$ şi AB sînt coplanare (ambele se află în planul (Q, A, B)). Dar cum $M'N' \subset \alpha$ şi AB are doar punctul C comun cu $\alpha \Rightarrow M'N' \cap AB = C$.

Deci $M'N'$ trece prin C. Dacă planele (A, d_1) şi (B, d_2) sînt paralele locul geometric este mulţimea vidă.

34) Un plan α intersectează laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale unui tetraedru $[ABCD]$ îm punctele L, M, N, P. Să se demonstreze că:

$$\|AL\| \cdot \|BM\| \cdot \|CN\| \cdot \|PD\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \cdot \|DN\| \cdot \|AP\| \quad a$$

Soluţie: Caz particular. Dacă planul $(LMNP) \| BD$ avem:



Reamintim teorema: Dacă un plan γ intersectează două plane α şi β a.î. $\sigma \| \alpha \cap \beta \Rightarrow (\gamma \cap \alpha) \| (\gamma \cap \beta) \| (\alpha \cap \beta)$. Dacă planul $(LMNP) \| BD$ avem:

$$\left.\begin{array}{l} LP \| MN \| BD \Rightarrow \dfrac{\|LA\|}{\|AP\|} = \dfrac{\|LB\|}{\|PD\|} \Rightarrow \|LA\| \cdot \|PD\| = \|AP\| \cdot \|LB\| \\ MN \| BD \Rightarrow \dfrac{\|NC\|}{\|MC\|} = \dfrac{\|ND\|}{\|MB\|} \Rightarrow \|BM\| \cdot \|NC\| = \|ND\| \cdot \|MC\| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|AL\| \cdot \|BM\| \cdot \|CN\| \cdot \|DP\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \cdot \|DN\| \cdot \|AP\|.$$

Dacă $(LMNP) \| AC$ avem: $LM \| PN \| AC \Rightarrow \dfrac{\|PD\|}{\|DN\|}$ şi $\dfrac{\|AL\|}{\|MC\|} = \dfrac{\|LB\|}{\|BM\|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|CN\|\cdot\|DP\| = \|DN\|\cdot\|AP\| \\ \|AL\|\cdot\|BM\| = \|BL\|\cdot\|CM\| \end{cases} \Rightarrow \text{relaţia } a$$

Soluţie:

Fie A', B', C', D' proiecţiile punctelor A, B, C, D în planul $(MNPL)$.

De ex. punctele B', L, A' sînt coliniare în planul $(LPMN)$ deoarece se găsesc pe proiecţia dreptei AB în acest plan.

$\Delta ALA' \sim \Delta BLB'(U,U) \Rightarrow \frac{\|AL\|}{\|LB\|} = \frac{\|AA'\|}{BB'}$.

Analog obţinem: $\frac{\|PD\|}{\|AP\|} = \frac{\|DD'\|}{\|AA'\|}$; $\frac{\|CN\|}{\|ND\|} = \frac{\|CC'\|}{\|DD'\|}$; $\frac{\|BM\|}{\|MC\|} = \frac{\|BB'\|}{\|CC'\|}$.

Prin înmulţirea celor 4 relaţii $\Rightarrow$

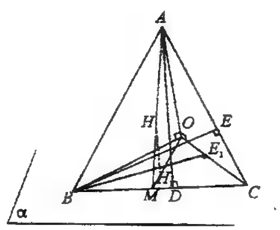
$$\frac{\|AL\|\cdot\|PD\|\cdot\|CN\|\cdot\|BM\|}{\|LB\|\cdot\|AP\|\cdot\|DN\|\cdot\|MC\|} = 1 \Rightarrow \text{ relaţia } (a) \text{ din d}$$

35) Dintr-un punct A exterior unui plan α se duce perpendiculara AO $O \in \alpha$ şi se iau $B, C \in \alpha$. Fie H, H_1 respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC, OBC; AD şi BE înălţimi în triunghiul ABC, iar BE_1 înălţime în triunghiul OBC. Să se arate:

a) $HH_1 \perp (ABC)$

b) $\frac{\|OA\|}{\|AD\|}\cdot\frac{\|DH_1\|}{\|H_1B\|}\cdot\frac{\|BE\|}{\|EE_1\|} = 1$.

Soluţie:



M-Mijlocul lui $|BC|$.

36) Se dă un tetraedru $[ABCD]$ în care $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$.

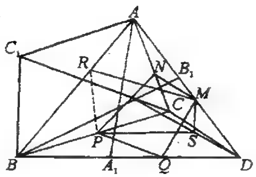
Să se arate:

a) $\|AB\|^2 + \|CD\|^2 =$

$BC\|^2 + \|AD\|^2 = \|CA\|^2 + \|BD\|^2$

b) mijloacele celor 6 muchii se află pe o sferă.

Soluţie:



(1) $AB \perp CD$ (ipoteză).

$DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp Ab \Rightarrow AB \perp DH$ (2)

Din 1 şi 2 $\Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp CH \Rightarrow CH$ înălţime în $\triangle ABC$ a

$AC \perp BD$ (3)

$DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp AC \Rightarrow AC \perp DH$ (4)

Din 3 şi 4 $\Rightarrow AC \perp (BDH) \Rightarrow AC \perp BH \Rightarrow BH$ înălţime în $\triangle ABC$ b

Din a şi b $\Rightarrow$ H ortocentrul $\triangle ABC$. Fie C_1 punctul diametral opus lui C în cercul $C(ABC) CC_1$ diametru $\Rightarrow m(\widehat{C_1BC}) = 90°$ dar şi $AH \perp BC \Rightarrow AH \| BC_1$. Analog $BH \| C_1A$ deci $AHBC_1$ paralelogram, avem astfel:

$\|AH\|^2 + \|BC\|^2 = \|BC_1\|^2 + \|BC\|^2 = \|CC_1\|^2 = (2R)^2$ analog

$\|BH\|^2 + \|AC\|^2 = (2R)^2$ $(\|BH\| = \|AB_1\|) B_1$ diametral opus lui B

$\|CH\|^2 + \|AB\|^2 = (2R)^2$ $(\|CH\| = \|BA_1\|)$

$$\text{dar } DH \perp (ABC) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \|AH\|^2 = \|AD\|^2 - \|DH\|^2 \\ \|BH\|^2 = \|BD\|^2 - \|DH\|^2 \\ \|CH\|^2 = \|DC\|^2 - \|DH\|^2 \end{array}\right\} \text{înlocuind sus avem:}$$

$\|AD\|^2 + \|BC\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$

$\|BD\|^2 + \|AC\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$

$\|DC\|^2 + \|AB\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$ c.t.d.

Fie N, M, Q, P, S, R mijloacele muchiilor. Patrulaterului $NMQP$ pentru că:

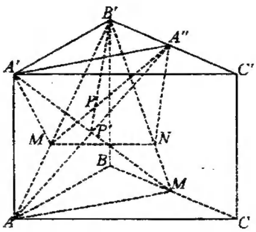
$$\left.\begin{array}{l} NM \| CD \| PQ \text{ (linii mijlocii)} \\ QM \| AB \| PN \ \ --\|-- \\ \text{dar } CD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow MNQP \text{ dreptunghi } |NQ| \cap |PM| = \{0\}.$$

Analog $MSPR$ dreptunghi cu $|MP|$ diagonală comună cu a primul dreptunghi deci cele 6 puncte sînt egal depărtate de "O" mijlocul diagonalelor în cele două dreptunghiuri $\Rightarrow$ cele 6

puncte sînt pe o sferă.

37) Se dă o prismă triunghiulară $[ABCA'B'C']$ care are feţele laterale pătrate. Fie M un punct mobil pe $[AB']$, N proiecţia lui M pe (BCC') şi A'' mijlocul lui $[B'C']$. Să se arate că $A'N$ şi MA'' se intersectează într-un punct P şi să se afle locul geometric a lui P.

Soluţie:



M arbitrar pe $|AB'|$

$N = pr_{(BCC')}M$

A'' mijlocul segmentului $[B'C']$

Cînd $M = B'$, punctul P ocupă poziţia B'.

Cînd $M = A$, punctul P ocupă poziţia $\{P_1\} = [A'A_1] \cap [AA'']$

($A'A''A_1A$ dreptunghi, deci P_1 este intersecţia diagonalelor dreptunghiului)

[Locul geometric este $[B'P_1]$].

Fie M arbitrar $M \in |AB'|$.

$N = pr_{(BCC')}M \in |A_1B'|$ deoarece: $(B'AA_1) \perp (B'CC')$.

Prin modul în care a fost construit $AA_1 \perp BC, AA_1 \perp CC' \Rightarrow AA_1 \perp (B'C'C) \Rightarrow (\forall)$ plan ce conţine pe AA_1 este perpendicular pe $(B'CC")$, în particular $(B'AA_1) \perp (B'C'C)$

(1) $[B'P_1] \subset (B'A''A)$ pentrucă $B', P \in (B'AA'')$

(2) $[B'P_1] \subset (A'B'A_1)$ din acest motiv $B', P_1 \in (A'B'A_1)$

Din 1 şi 2 $\Rightarrow B'P_1 = (A'B'A_1) \cap (B'A''A)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } \{P\} = |MA''| \cap |A'N| \\ \text{Cum } |MA''| \subset (B'A''A) \text{ şi} \\ |A'N| \subset (A'B'A_1) \end{array}\right\} \Rightarrow P \in (B'A''A) \cap (A'B'A_1) \Rightarrow P \in |B'P_1| \quad N = pr_{(B'C'C)}M$$

Deci $(\forall) M \in |B'A|$ şi avem că $|MA''| \cap |A'N| \in |B'P_1|$.

Reciproc. Fie P arbitrar, $P \in |B'P_1|$ şi

$$\text{În planul } (B'A''A) : \{M\} = |B'A| \cap |A''P|$$

$$\text{În planul } (B'A'A_1) : \{N\} = |B'A_1| \cap |A'P|$$

Trebuie să demonstrăm că ...?

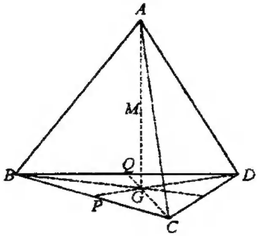
Într-adevăr: $A'A''\|(B'AA_1)$ deci orice plan care trece prin $A'A''$ va intersecta $(B'AA_1)$ după o dreaptă paralelă cu $A'A''$. Deci $MN\|A'A''$ sau $MN\|AA_1$ cum $M \in (B'AA_1) \Rightarrow MN\perp(B'CC')$.

Am dem. $(\forall)M \in |B'A|$ şi $N = pr_{(B'CC')}$ avem că $\{P\} = |MA''| \cap |A'N|$ descrie $[B'P_1]$ şi reciproc, $(\forall)P \in [B'P_1]$ există $M \in |B'A|$ şi $N \in |B'A_1|$ astfel încît $N = pr_{(B'C'C)}M$ şi P este intersecţia diagonalelor patrulaterului $A'NMA''$.

38) Fie tetraedrul $[ABCD]$ şi G centru de greutate al triunghiului BCD. Să se arate că dacă $M \in AG$ atunci

$$v[MGBC] = v[MGCD] = v[MGDB].$$

Soluţie:



1 $\sigma[CDG] = \sigma[BDG] = \sigma[BCG] = \dfrac{\sigma[BCD]}{3}$ rezultat cunoscut

$$3 \begin{cases} v[MGCD] = \dfrac{\sigma[GCD]d(M,(BCD))}{3} \\ v[MGDB] = \dfrac{\sigma[BDG]d(M,(BCD))}{3} \\ v[MGBC] = \dfrac{\sigma[BCG]d(M,(BCD))}{3} \end{cases}$$

Din 1 şi 3 $\Rightarrow v[MGCD] = v[MGDB] = v[MBC]$.

FLORENTIN SMARANDACHE

Probleme compilate şi rezolvate
de geometrie şi trigonometrie

Semnat pentru tipar 12.XII.97. Formatul 60×84. 1/16. Rotoprint.
Comanda 268. Preţ contractual.

Secţia poligrafia operativă
a U.S.M.. 2009. Chişinău,
str. Mateevici, 60.

d"
C"
D'
b
N
C
M"
C'
M
M'
B
B'
d
A'
a
α